المادة :- الإقتصاد القياسي
Econometrics

المرحلة :- الرابعة/قسم الإقتصاد

إعداد :- د. مثنى عبد الإله ناصر

2002 / 2003 م

مقدمة

يختص الإقتصاد القياسي بتطبيق الرياضيات، والأساليب الإحصائية، والنظرية الإقتصادية في إختبار الفرضيات، والتقدير، والتنبوء بالظواهر الإقتصادية .

يرتبط الإقتصاد القياسي إرتباطاً وثيقاً بتحليل الإنحدار ((Regression analysis)) . وينصب تحليل الإنحدار هذا على تقدير العلاقة الدالية بين متغير تابع (معتمد، ومتأثر) (Y) وبين متغير مستقل (مؤثر) (X) واحد أو أكثر.

مثال : الدالة التالية تمثل دالة الإستهلاك والتي توضح إعتماد الإستهلاك (C) كمتغير تابع على تغيرات الدخل المتاح (Y_d) كمتغير مستقل .

$$C = a + b Y_d$$

حيث إن a ، و b ثوابت مجهولة تسمى معالم يتم تقديرها بتحليل الإنحدار . توضح a الإستهلاك المستقل ، وتوضح b ميل خط الإنحدار وتمثل إقتصادياً الميل الحدي للإستهلاك MPC .

وكما هو معلوم يختلف الإنفاق الإستهلاكي حتى بالنسبة للأفراد المتساوية دخولهم نتيجة أسباب أخرى (مثل الأذواق ، وإختلاف البيئة ، التوقعات .... الخ) ، لذلك تضاف لدالة الإستهلاك النظرية الدقيقة السابقة حد التشويش أو حد الخطأ (u) حتى تكون الدالة ذات طابع إحتمالي يقبل التقريب ، وكما يلي :

$$C = a + b Y_d + u$$

ملاحظة :- إن حد الخطأ لا يجب أن تتضمنه العلاقات الدقيقة التي تفرضها النظرية الإقتصادية والإقتصاد الرياضي حتى تكون هذه العلاقات

ذات طابع إحتمالي . (ليعكس ذلك حقيقة إن العلاقات الإقتصادية بين المتغيرات الإقتصادية في الواقع غير دقيقة وقد تكون بعيدة عن النظرية) .

مراحل الإقتصاد القياسي :

تتضمن بحوث الإقتصاد القياسي بصفة عامة المراحل التالية :-

المرحلة الأولى :- تحديد النموذج أو الفرض بشكل معادلة إحتمالية صريحة ، مع توقعات نظرية مسبقة عن إشارة وحجم معالم الدالـة .

المرحلة الثانيـة :- جمع بيانات عن متغيرات النموذج وتقدير معاملات الدالـة بإستخدام أساليب الإقتصاد القياسي المناسـبة .

المرحلة الثالثة :- تقييم المعاملات المقدرة في الدالة بإستخدام المعايير الإحصائية و الإقتصادية والقياسية .

المرحلة الرابعة :- تكون هناك مرحلة رابعة في حالة عدم توفر شروط إعتماد النموذج . حيث تحدد كيفية إجراء تصحيح وذلك بتعديل العلاقة المفترضة و إعادة التقدير حتى يتم التوصل لعلاقة مقدرة مرضية .

تحليل الإنحدار البسيط

يستخدم النموذج الخطي ذي المتغيرين ((تحليل الإنحدار البسيط)) لإختبار الفروض حول العلاقة بين متغير تابع (Y) ومتغير مستقل (X)، وللتنبوء. ويبدأ الإنحدار الخطي عادة برسم مجموعة قيم Y X في شكل إنتشار ثم التحديد بالنظر فيما إذا كانت هناك علاقة خطية تقريبية.

$$\hat{Y}_i = a + b X_i$$

وحيث أنه من غير المتوقع أن تقع النقاط تماماً على الخط، فإن العلاقة الخطية التامة يجب تعديلها بحيث تضم حد الخطأ (u_i).

$$\hat{Y}_i = a + b X_i + u_i$$

يتم تقدير قيمتي a و b غالباً بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) لأنها أسلوب لتوفيق أفضل خط مستقيم لعينة مشاهدات. وهو يتضمن تصغير مجموع المربعات لإنحرافات النقاط الرأسية ($\sum e_i^2$) عن الخط إلى أدنى حد ممكن:-

$$Min \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad \text{أو} \quad Min \sum e_i^2$$

حيث تشير Y_i إلى قيم Y الفعلية، وتشير $\hat{Y}_i$ إلى القيم التقريبية المناظرة. بحيث تكون $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ هي البواقي (الإنحرافات عن القيم الفعلية).

وحسب طريقة (OLS) فإن:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \\ \hat{a} &= \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} \end{aligned}}$$

وإن

حيث إن :- $x_i = X_i - \bar{X}$ ، و $y_i = Y_i - \bar{Y}$

وإن $\bar{X}$: هو الوسط الحسابي للمشاهدات $X_i = \frac{\sum X_i}{n}$

و $\bar{Y}$: هو الوسط الحسابي للمشاهدات $Y_i = \frac{\sum Y_i}{n}$

وبعد إيجاد قيمتي المعلمتين $\hat{a}$ ، و $\hat{b}$ يتم تعويضهما بالمعادلة

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b} X_i + \mu_i$$

مثال :- إحسب معادلة الإنحدار التقديرية التي توضح العلاقة الخطية بين المتغيرين - الكميات المستخدمة من السماد (X_i) بالكيلوغرام ، وبين الكميات المنتجة من محصول زراعي معين (Y_i) بالطن في مزرعة معينة خلال السنوات العشرة المبينة بالجدول التالي :-

السنة	Y_i الإنتاج	X_i السماد	y_i $(Y_i-\bar{Y})$	x_i $(X_i-\bar{X})$	$x_i y_i$	x_i^2
1991	40	6	−17	−12	204	144
1992	44	10	−13	−8	104	64
1993	46	12	−11	−6	66	36
1994	48	14	−9	−4	36	16
1995	52	16	−5	−2	10	4
1996	58	18	1	0	0	0
1997	60	22	3	4	12	16
1998	68	24	11	6	66	36
1999	74	26	17	8	136	64
2000	80	32	23	14	322	196
Σ	570	180	0	0	956	576

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{180}{10} = 18$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{570}{10} = 57$$

نعوض بالصيغة :

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$= \frac{956}{576}$$

$$\therefore \boxed{\hat{b} = 1.66}$$

وهو ميل خط الإنحدار المقدّر (ظا ∡ الإنحدار)

و نعوض قيمة $\hat{b}$ في الصيغة :

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}$$

$$= 57 - (1.66)(18)$$

$$= 57 - 29.88$$

$$\therefore \boxed{\hat{a} = 27.12}$$

وهو المقطع من المحور العمودي (Y)

إذن تكون معادلة الإنحدار التقديرية هي :

معادلة الإنحدار التقديرية

$$\boxed{\hat{Y}_i = 27.12 + 1.66 X_i + u_i}$$

س :- ماذا يعني حد الخطأ (μ_i) ؟ ولماذا ينشأ ؟

ج :- حد الخطأ (والمعروف أيضاً بحد التشويش أو الحد العشوائي) يقيس إنحراف القيمة المشاهدة Y_i من خط الإنحدار التقديري.

وتنشأ حدود الخطأ هذه والتي يدل عليها μ_i بسبب من الأسباب التالية :-

أ- وجود عدة متغيرات مفسرة ذات تأثير ضئيل أو غير منتظم على Y_i ولم يتم إدخالها ضمن النموذج.

2 - أخطاء ممكنة في قياس Y_i.

3 - السلوك الإنساني العشوائي وغير المستقر مقارنة بالمتغيرات الطبيعية.

س أذكر الفرق بين a و b من ناحية و $\hat{a}$ و $\hat{b}$ من ناحية أخرى ؟

ج :- إن a و b هما معلمتا خط الإنحدار الحقيقي ولكن غير المعلوم.
بينما $\hat{a}$ و $\hat{b}$ هما معلمتا خط الإنحدار المقدّر.

س أذكر الفرق بين μ_i و e_i .

ج :- إن μ_i: هو حد الخطأ في العلاقة الحقيقية غير المعلومة بين X_i و Y_i.
بينما e_i : هي البواقي (الفرق) بين قيمة كل مشاهدة لـ Y_i والقيمة التقديرية المناظرة لها $\hat{Y}_i$ في العلاقة المقدّرة.

إختبار معنوية المعالم (إختبار t) (t Test) :-

لإختبار المعنوية الإحصائية لتقديرات معالم الإنحدار يتم أولاً إحتساب التباين (S^2) (أو σ^2) لكل من المعلمتين المقدرتين $\hat{a}$ و $\hat{b}$، أي إحتساب $S^2_{\hat{a}}$ و $S^2_{\hat{b}}$ وكمايلي :-

$$\boxed{S^2_{\hat{a}} = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \cdot \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2}}$$

و

$$\boxed{S^2_{\hat{b}} = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \cdot \frac{1}{\sum x_i^2}}$$

حيث إن :-

$\sum e_i^2$:- مجموع مربعات البواقي وهي $\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$.

n :- عدد المشاهدات .

K :- عدد المعالم المقدّرة . (في تحليل الإنحدار البسيط $K=2$)

$n-K$:- درجات الحرية . ($V = 10-2=8$) .

$\sum x_i^2$:- $\sum (X_i - \bar{X})^2$

ويتم الحصول على ($\sum e_i^2$) من خلال إيجاد ($\hat{Y}_i$) من الجدول السابق وذلك بتعويض قيم (X_i) في معادلة الإنحدار المقدّرة السابقة والتي تم الحصول عليها ، وكما مبين من الجدول التالي :-

Y_i	X_i	$\hat{Y}_i$	e_i $(Y_i-\hat{Y}_i)$	e_i^2	X_i^2
40	6	37.08	2.92	8.5264	36
44	10	43.72	0.28	0.0784	100
46	12	47.04	-1.04	1.0816	144
48	14	50.36	-2.36	5.5696	196
52	16	53.68	-1.68	2.8224	256
58	18	57.00	1.00	1.0000	324
60	22	63.64	-3.64	13.2496	484
68	24	66.96	1.04	1.0816	576
74	26	70.28	3.72	13.8384	676
80	32	80.24	-0.24	0.0576	1024
			0.00	47.3056	3816

$$\because \; S^2_{\hat{a}} = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \cdot \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2}$$

$$\therefore \; = \frac{47.3056}{10-2} \cdot \frac{3816}{10(576)}$$ بالتعويض

$$= \frac{47.3056}{8} \cdot \frac{3816}{5760}$$

$$\therefore \; \boxed{S^2_{\hat{a}} \simeq 3.92}$$

$$\therefore S^2_{\hat{b}} = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \cdot \frac{1}{\sum x_i^2}$$

بالتعويض

$$\therefore \quad = \frac{47.3056}{10-2} \cdot \frac{1}{576}$$

$$= \frac{47.3056}{8} \cdot \frac{1}{576}$$

$$\therefore \boxed{S^2_{\hat{b}} \simeq 0.01}$$

ومن قيم التباين للمعلمتين يمكن إيجاد الخطأ المعياري لكل منهما.
حيث إن الخطأ المعياري هو $S = \sqrt{S^2}$. وكمايلي :

$$\because S_{\hat{a}} = \sqrt{S^2_{\hat{a}}}$$

$$= \sqrt{3.92}$$

$$\therefore \boxed{S_{\hat{a}} = 1.98}$$

$$\because S_{\hat{b}} = \sqrt{S^2_{\hat{b}}}$$

$$= \sqrt{0.01}$$

$$\therefore \boxed{S_{\hat{b}} = 0.1}$$

وبعد الحصول على كل من الخطأين المعياريين $S_{\hat{a}}$ ، و $S_{\hat{b}}$
يمكن القيام باختبار معنوية المعالم (إختبار t) وبدرجات
حرية $(n-k=8)$ كمايلي :

حيث إن :- $\boxed{t_{\hat{a}} = \frac{\hat{a}}{S_{\hat{a}}}} = \frac{27.12}{1.98}$

$\therefore \boxed{t_{\hat{a}} \simeq 13.7}$

وإن :- $\boxed{t_{\hat{b}} = \frac{\hat{b}}{S_{\hat{b}}}} = \frac{1.66}{0.1}$

$\therefore \boxed{t_{\hat{b}} \simeq 16.6}$

ومن الجداول الإحصائية يتضح بأن قيمة t الجدولية (من
إختبارات ذي الذيلين) وبدرجات حرية $(n-k=8)$ ، وعند مستوى
معنوية (5%) (أي مستوى ثقة 95%) هي $t = 2.31$.

وعند مقارنة كل من $t_{\hat{a}} = 13.7$ ، و $t_{\hat{b}} = 16.6$ بالقيمة
الجدولية يتضح بأن قيمة كل منهما تتجاوز قيمة t الجدولية.
ولذلك نستنتج بأن كل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ معنوية إحصائياً بمستوى
معنوية 5% .

وحتى عند مستوى معنوية (1%) (مستوى ثقة 99%)
والذي عنده t الجدولية هي 3.36 يتضح بأن $t_{\hat{a}}$ و $t_{\hat{b}}$
المحسوبتان أكبر من قيمة t الجدولية . وبهذا فإنهما معنويتان
إحصائياً بمستوى معنوية (1%) .
ولهذا فإن قيمة كل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ مقبولة إحصائياً ويمكن الإعتماد
عليهما .

ملاحظة :-

لو كانت قيمة t المحتسبة لأي معلمة أقل من t الجدولية فتكون قيمة المعلمة عندئذ غير معنوية ولايتم الإعتماد عليها.

س :- كيف تستخرج قيمة t الجدولية ؟

ج :- على سبيل التوضيح :- كانت درجات الحرية في المثال السابق هي $(n-K=8)$ والمطلوب إيجاد t بمستوى معنوية 5% ، و 1% .
فإننا نذهب إلى جدول t ذي الذيلين ثم نتحرك على العمود الأيسر نزولاً (والذي يمثل درجات الحرية V أو df) حتى نصل إلى درجة حرية (8). ثم نتحرك أفقياً نحو اليمين حتى القيمة التي تقع ضمن العمود الذي يمثل مستوى معنوية 5% وهذه القيمة كانت $t = 2.31$.
وبنفس الطريقة عند مستوى معنوية 1% سنحصل على القيمة الجدولية $t = 3.36$.

إختبار الإرتباط وجودة التوفيق :-

أولاً :- الإرتباط الخطي :- هو وسيلة لقياس مقدار جودة العلاقة الخطية المقدرة لتلائم البيانات .
ومعامل الإرتباط الخطي (r) :- هو مقياس لقوة الإرتباط الخطي بين متغيرين . ويحسب كمايلي :-

$$\boxed{r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2}}}$$

وتتراوح قيمة (r) بين العددين (∓ 1) ، أي إن $\boxed{-1 \leqslant r \leqslant +1}$ وكمايلي :-

* - عندما $r<0$ فإن المتغيرين X_i و Y_i يتحركان باتجاهات متعاكسة (علاقة عكسية)، مثل السعر والكمية المطلوبة.
* - عندما $r>0$ فإن المتغيرين يتحركان بنفس الإتجاه (علاقة طردية).
* - عندما $r=-1$ فإن هناك إرتباط عكسي تام (بمعنى إن كل مشاهدات العينة تقع على خط مستقيم ذي ميل سالب) (حالة نادرة).
* - عندما $r=+1$ فإن هناك إرتباط طردي تام (بمعنى إن كل مشاهدات العينة تقع على خط مستقيم ذي ميل موجب) (حالة نادرة).
* - تزداد قوة الإرتباط بين المتغيرين كلما إقتربت قيمة (r) من (-1) أو ($+1$)، وتقل كلما إقتربت قيمة (r) من الصفر.
* - عندما $r=0$ هذا يعني عدم وجود أي علاقة خطية بين المتغيرين X_i، و Y_i (علاقة تامة غير خطية)، أي إن المتغيرين يتحركان بدون وجود أي صلة بينهما.

س :- إحسب قيمة معامل الإرتباط (r) للعلاقة المذكورة في المثال السابق.

$$\therefore r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2}}$$

وإن: $\sum x_i y_i = 956$ ، و $\sum x_i^2 = 576$
فيجب إيجاد قيمة ($\sum y_i^2$) كذلك من الجدول السابق وكما يلي :-

y_i^2
289
169
121
81
25
1
9
121
289
529
1634

وبالتعويض ينتج :-

$$r = \frac{956}{\sqrt{576} \cdot \sqrt{1634}}$$

$$\therefore r \simeq 0.9854$$

أي إن :-

$$\boxed{r \simeq 98.54\,\%}$$

وهو موجب لأن $\hat{b}$ موجبة كذلك. وهذا يعني إن علاقة الإرتباط الخطي بين المتغيرين (السماد X_i والإنتاج Y_i) هي علاقة طردية قوية.

ثانياً :- معامل التحديد (معامل التفسير) (R^2) :- وهو نسبة التغيّر الإجمالي في المتغير التابع (Y_i) الذي تفسره معادلة الإنحدار التقديرية للعلاقة بين المتغير المستقل (X_i) والمتغير التابع (Y_i). وتتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح أي :- $0 \leqslant R^2 \leqslant +1$
وكما يلي :-

- عندما $R^2 = 0$. فإن معادلة الإنحدار لا تفسّر أياً من تغيرات (Y_i).
- عندما $R^2 = 1$ فإن كل النقاط الفعلية تقع على خط الإنحدار التقديري، وهي حالة نادرة جداً في البحوث الإقتصادية.
- عندما تقترب قيمة R^2 من الـ 1 فهذه دلالة على إقتراب المشاهدات من خط الإنحدار المقدّر (أي تكون البواقي أصغر ما يمكن)، وهنا تزداد دقة التفسير والتنبوء. والعكس بالعكس.

ويمكن إحتساب قيمة معامل التحديد (R^2) بإحدى الصيغ التالية :-

★ — إن معامل التحديد هو مربع معامل الإرتباط .

أي إن :- $R^2 = (r)^2$

أو بمعنى :-

$$\boxed{R^2 = \left(\frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2}}\right)^2}$$

★ — أو :-

$$\boxed{R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2}}$$

حيث إن $\sum \hat{y}_i^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$

★ — أو :-

$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}}$$

س :- إحسب معامل التحديد (R^2) للعلاقة المذكورة في المثال السابق .

ج :-

$\because r = 0.9854$

$\therefore R^2 = (0.9854)^2$

$\therefore R^2 = 0.971$

أو يقال إن $R^2 = 97.1\%$. وهذا يعني إنه تقريباً 97% من

التغيرات التي تحدث في الكمية المنتجة تفسرها التغيرات التي تحدث في السماد كمتغير مستقل (مع إفتراض ثبات العوامل الأخرى المؤثرة على الإنتاج).

س: كيف يمكن إشتقاق الصيغة $R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$ من الصيغة $\sum y_i^2 - \sum \hat{y}_i^2 = \sum e_i^2$ ؟

ج:

$$\because \sum y_i^2 - \sum \hat{y}_i^2 = \sum e_i^2$$

$$\sum y_i^2 = \sum e_i^2 + \sum \hat{y}_i^2$$

وبالقسمة على $\sum y_i^2$:

$$\cancel{\frac{\sum y_i^2}{\sum y_i^2}} = \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} + \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$1 = \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} + R^2$$

$$\therefore R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

س: إرسم شكلاً بيانياً موضحاً فيه الشكل الإنتشاري لمشاهدات (X_i, Y_i) الفعلية من المثال السابق. وإرسم خط الإنحدار التقديري الذي تم الوصول إليه. ثم بيّن بالشكل نفسه ما معنى البواقي (e_i) ولو بمثال واحد.

وبعد إجراء التقدير والإختبارات، وبعد أن تم الوثوق بقيم معلمات معادلة الإنحدار إحصائياً وملائمتها للمنطق تكتب معادلة الإنحدار التقديرية كما يلي :-

$$\hat{Y}_i = 27.12 + 1.66 X_i \qquad R^2 = 0.97$$
$$(13.7) \qquad (16.6)$$

ملاحظات :-

ملاحظة (1) :- تكتب قيم t المحتسبة بين الأقواس وتحت قيم المعلمات المقدّرة.

ملاحظة (2) :- يمر خط الإنحدار المقدّر بالنقطة $(\bar{X}, \bar{Y})$. ويمكن التأكد من ذلك من خلال تعويض قيمة $(\bar{X} = 18)$ في المعادلة التقديرية بدلاً من X_i فستكون قيمة $(\hat{Y}_i = 57)$.

ملاحظة (3) :- يمكن التنبوء بقيمة $(\hat{Y}_i)$ من خلال التعويض عن قيمة (X_i) بالقيمة المقترحة. مثلاً يمكننا التنبوء عن قيمة $\hat{Y}_i$ إذا كانت $X_i = 40$ كما يلي :-

$$\hat{Y}_i = 27.12 + 1.66(40)$$
$$= 27.12 + 66.40$$
$$\therefore \boxed{\hat{Y}_i = 93.52}$$

ملاحظة (4) :- يمكن قياس مرونة Y بالنسبة لـ X عند المتوسطات كما يلي :-

$$E = \hat{b} \cdot \left(\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}\right)$$

س / أوجد مرونة الإنتاج الزراعي بالنسبة للسماد حسب المثال السابق :-

بما إن :- $\hat{b} = 1.66$ ، $\bar{X} = 18$ ، $\bar{Y} = 57$

$$\therefore E = \hat{b} \cdot \left(\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}\right) = 1.66\left(\frac{18}{57}\right) = \frac{29.88}{57} \simeq 0.52$$

سؤال شامل :

إذا كانت صادرات دولة معينة (X_i) ، وناتجها القومي الإجمالي (Y_i) بمليارات الدولارات في السنوات العشر الأخيرة كما في الجدول التالي :

السنوات	Y_i	X_i
1992	20	2
1993	28	3
1994	40	5
1995	45	4
1996	37	3
1997	52	5
1998	54	7
1999	43	6
2000	65	7
2001	56	8

المطلوب :

أ - إحسب معادلة الإنحدار التقديرية بين المتغيرين.

ب - ما معنى كل من $\hat{a}$ ، و $\hat{b}$.

ج - أوجد مرونة Y بالنسبة لـ X .

د - إحسب $S^2_{\hat{a}}$ ، و $S_{\hat{a}}$.

هـ - إحسب $S^2_{\hat{b}}$ ، و $S_{\hat{b}}$.

و - إختبر عند مستوى معنوية (5%) كلاً من $\hat{a}$ ، و $\hat{b}$. أي إختبر معنوية المعالم (t Test) ، وكذلك عند مستوى معنوية (1%)

ز - إحسب معامل الإرتباط (r) .

ح - إحسب معامل التحديد (R^2) .

وضع المعادلة

الأجوبة :

أ - $\hat{Y}_i = 14.28 + 5.94 X_i$

ج - $E \simeq 0.68$

د - $S^2_{\hat{a}} \simeq 37.31$ ، $S_{\hat{a}} \simeq 6.11$

هـ - $S^2_{\hat{b}} \simeq 1.31$ ، $S_{\hat{b}} \simeq 1.14$.

و - معنوية إحصائياً ، معنوية إحصائياً .

ز - $r \simeq 0.88$

ح - $R^2 \simeq 0.77$

سؤال شامل : - يوضح الجدول التالي دخل الفرد السنوي (بالدولارات) (Y_i) في عشر دول عربية غير نفطية ، والنسب المئوية للقوة العاملة في الزراعة من مجمل القوة العاملة فيها (X_i) في عام 1996 . المطلوب :-

أ - قدّر معادلة الإنحدار $\frac{Y_i}{X_i}$.

ب - إختبر عند مستوى معنوية 5% المعنوية الإحصائية للمعالم .

جـ - أوجد (r) و R^2 .

ء - ضع نتائج المعادلة المقدّرة بصورة قياسية موجزة .

الدولة	Y_i	X_i
الأردن	1475	14.6
تونس	2035	22.7
الجزائر	1537	23.8
السودان	215	67.9
سوريا	1160	32.2
لبنان	4136	3.7
مصر	1215	31.9
المغرب	1376	40.0
موريتانيا	440	47.5
اليمن	284	56.1
Σ	13873	340.4

الأجوبة:

أ/ $\hat{Y}_i = 3094.917 - 50.165 X_i$

ب/ $S^2_{\hat{a}} \simeq 842686.1814$

$S^2_{\hat{b}} \simeq 109.8422$

$S_{\hat{a}} \simeq 917.9794$

$S_{\hat{b}} \simeq 10.481$

$t_{\hat{b}} \simeq -4.786$ ، $t_{\hat{a}} \simeq \cancel{3.375}$ 3.55

معنويتان عند مستوى 5% ، وحتى عند مستوى 1%

جـ/ $r \simeq -0.8584$

$R^2 \simeq 0.737$

$$\therefore \hat{Y}_i = 3094.917 - 50.165 X_i \qquad R^2 \simeq 0.737$$
$$(\cancel{3.375})\ 3.55 \qquad (-4.786)$$

$\Sigma x_i y_i = -170042.22$ ، $\Sigma x_i^2 = 3389.684$ ، $\Sigma e_i^2 = 2978643.831$

$\Sigma X_i^2 = 14976.9$

تحليل الإنحدار المتعدِّد

يُستخدم تحليل الإنحدار المتعدد لإختبار الفروض عن العلاقة بين متغير تابع (Y_i) وإثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة $(X_1$ ، $X_2 \ldots X_n)$ للتنبوء . ويمكن كتابة نموذج الإنحدار الثلاثي كالآتي :-

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b} X_{1i} + \hat{C} X_{2i} + u_i$$

ملاحظة :- في النموذج الخطي المتعدد لا توجد علاقة خطية تامة بين المتغيرين المستقلين X_1 ، و X_2 . لأنه لو كانت بينهما علاقة إرتباط تام ، لأستحال حساب تقديرات معالم طريقة المربعات الصغرى .

ويتم الحصول على قيم المعالم a ، و b ، C من الصيغ التالية :-

$$\hat{b} = \frac{(\Sigma x_1 y) \cdot (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_2 y) \cdot (\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2) \cdot (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{C} = \frac{(\Sigma x_2 y) \cdot (\Sigma x_1^2) - (\Sigma x_1 y) \cdot (\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2) \cdot (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b} \bar{X}_1 - \hat{C} \bar{X}_2$$

ملاحظة:

إن المعلمة $\hat{a}$ هي الحد الثابت ، أو مقطع الإنحدار ، وهي تمثل قيمة المتغير التابع (Y) عندما $X_1=X_2=0$. وعادة لا تكون قيمة $\hat{a}$ ذات أهمية أساسية في الإنحدار المتعدد ، ويمكن حذف إختبار المعنوية الإحصائية الخاصة بها .

مثال: إحسب معادلة الإنحدار المتعدد التقديرية التي توضح العلاقة بين المتغيرين المستقلين: الكميات المستخدمة من السماد (X_1) بالكيلوغرامات والكميات المستخدمة من المبيدات (X_2) منجهة وبين المتغير التابع: الكميات المنتجة من محصول زراعي معين (Y_i) بالطن في مزرعة معينة خلال السنوات العشرة المبينة في الجدول التالي:

$$\therefore \hat{b} = \frac{(\Sigma x_1 y)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_2 y).(\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{(956)(504) - (900)(524)}{(576)(504) - (524)^2}$$

$$= \frac{481824 - 471600}{290304 - 274576}$$

$$= \frac{10224}{15728}$$

$$\therefore \boxed{\hat{b} \simeq 0.65}$$

السنة	Y	X_1	X_2	y $(Y-\bar{Y})$	x_1 $(X_1-\bar{X}_1)$	x_2 $(X_2-\bar{X}_2)$	$x_1 y$	$x_2 y$	$x_1 x_2$	x_1^2	x_2^2
1991	40	6	4	-17	-12	-8	204	136	96	144	64
1992	44	10	4	-13	-8	-8	104	104	64	64	64
1993	46	12	5	-11	-6	-7	66	77	42	36	49
1994	48	14	7	-9	-4	-5	36	45	20	16	25
1995	52	16	9	-5	-2	-3	10	15	6	4	9
1996	58	18	12	1	0	0	0	0	0	0	0
1997	60	22	14	3	4	2	12	6	8	16	4
1998	68	24	20	11	6	8	66	88	48	36	64
1999	74	26	21	17	8	9	136	153	72	64	81
2000	80	32	24	23	14	12	322	276	168	196	144
Σ	570 $\bar{Y}=57$	180 $\bar{X}_1=18$	120 $\bar{X}_2=12$	0	0	0	956	900	524	576	504

$$\because \hat{C} = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{(900)(576) - (956)(524)}{(576)(504) - (524)^2}$$

$$= \frac{518400 - 500944}{290304 - 274576}$$

$$= \frac{17456}{15728}$$

$$\therefore \boxed{\hat{C} \simeq 1.11}$$

$$\because \hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}_1 - \hat{C}\bar{X}_2$$

$$= 57 - (0.65)(18) - (1.11)(12)$$

$$\simeq 57 - 11.70 - 13.32$$

$$\therefore \boxed{\hat{a} \simeq 31.98}$$

$$\boxed{\hat{Y}_i = 31.98 + 0.65 X_{1i} + 1.11 X_{2i}}$$

وعليه فإن

إختبار معنوية المعالم (إختبار t) :

لإختبار المعنوية الإحصائية لتقديرات معالم الإنحدار يتم أولاً إحتساب التباين (S^2) (أو σ^2) لكل من المعلمتين المقدرتين $\hat{b}$ أو $\hat{c}$ (ولا يتم إحتساب S^2 للمعلمة $\hat{a}$ لأنها ليست موضع إهتمام أساسي كما أشير سابقاً). وكما يلي :

لا تحفظ

$$\boxed{S_{\hat{b}}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-K} \cdot \frac{\sum x_2^2}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

لا تحفظ

$$\boxed{S_{\hat{c}}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-K} \cdot \frac{\sum x_1^2}{(\sum x_1^2)\cdot(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

K: هي عدد المعالم المقدّرة، وهنا ($K=3$). أي إن درجات الحرية ($n-K=10-3=7$).

ويتم الحصول على ($\sum e_i^2$) من خلال إيجاد ($\hat{Y}_i$) من الجدول السابق، وذلك بتعويض قيم (X_i) في معادلة الإنحدار المقدّرة السابقة والتي تم الحصول عليها. وكما يتبين من الجدول التالي :

السنة	Y	X_1	X_2	$\hat{Y}$	e_i	e_i^2	y^2
1971	40	6	4	40.32	-0.32	0.1024	289
1972	44	10	4	42.92	1.08	1.1664	169
1973	46	12	5	45.33	0.67	0.4489	121
1974	48	14	7	48.85	-0.85	0.7225	81
1975	52	16	9	52.37	-0.37	0.1369	25
1976	58	18	12	57.00	1.00	1.0000	1
1977	60	22	14	61.82	-1.82	3.3124	9
1978	68	24	20	69.78	-1.78	3.1684	121
1979	74	26	21	72.19	1.81	3.2761	289
1980	80	32	24	79.42	0.58	0.3364	529
$\sum$					0.00	13.6704	1.634

وباستخدام الجدول وبالتعويض بصيغتي التباين السابقة نحصل على :

$$S_{\hat{b}}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-K} \cdot \frac{\sum x_2^2}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{13.6704}{10-3} \cdot \frac{504}{(576)(504) - (524)^2}$$

$$= 1.9529 \cdot \frac{504}{290304 - 274576}$$

$$= (1.9529)(0.032)$$

$$\therefore \boxed{S_{\hat{b}}^2 \simeq 0.062}$$

$$\because S_{\hat{c}}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-K} \cdot \frac{\sum x_1^2}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{13.6704}{10-3} \cdot \frac{576}{(576)(504) - (524)^2}$$

$$= 1.9529 \cdot \frac{576}{290304 - 274576}$$

$$= (1.9529) \cdot (0.0366)$$

$$\therefore \boxed{S_{\hat{c}}^2 \simeq 0.071}$$

ومن قيمتي التباين للمعلمتين $\hat{b}$ و $\hat{c}$ يمكن إستخراج الخطأ المعياري لكل منهما و كما يلي :

$$S_{\hat{b}} = \sqrt{S_{\hat{b}}^2} = \sqrt{0.062}$$

$$\therefore \boxed{S_{\hat{b}} \simeq 0.249}$$

$$S_{\hat{c}} = \sqrt{S_{\hat{c}}^2} = \sqrt{0.071}$$

$$\therefore \boxed{S_{\hat{c}} \simeq 0.266}$$

وبما إن :-

$$t_{\hat{b}} = \frac{\hat{b}}{S_{\hat{b}}} \quad , \quad t_{\hat{c}} = \frac{\hat{c}}{S_{\hat{c}}}$$

بالتعويض :

$$t_{\hat{b}} = \frac{0.65}{0.249}$$

$$\therefore \boxed{t_{\hat{b}} \simeq 2.610}$$

$$t_{\hat{c}} = \frac{1.11}{0.266}$$

$$\therefore \boxed{t_{\hat{c}} \simeq 4.173}$$

ويتضح من الجداول بأن قيمة t بدرجات حرية $(n-K=7)$ وعند مستوى معنوية $(\%5)$ هي $(t = 2.36)$ فإن كلاً من قيمتي $\hat{b}$ ، و $\hat{c}$ معنويتان . لذلك يمكن الإعتماد على قيمتيهما بدرجة ثقة $(\%95)$.

أما عند مستوى معنوية $(\%1)$ فإن $(t = 3.5)$ من الجداول ، أي إن قيمة $\hat{b}$ غير معنوية إحصائياً " لأن قيمة $t_{\hat{b}}$ المحتسبة هي $(t_{\hat{b}} = 2.61)$ وهي أصغر من (3.5) ومن هنا فإن التقدير غير موثوق به عند درجة ثقة $(\%99)$.

إختبار الإرتباط وجودة التوفيق :-

أولاً :- معاملات الإرتباط الجزئي (r) :- تستخدم معاملات الإرتباط الجزئي في تحليل الإنحدار المتعدد لتحديد الأهمية النسبية لكل متغير مفسر في النموذج ، وإن

المتغير المستقل صاحب أعلى معامل إرتباط جزئي مع المتغير التابع يساهم أكثر من المتغيرات المستقلة الأخرى في القدرة التفسيرية للنموذج ويدخل أولاً في تحليل الإنحدار (خطوة ـ خطوة).
ولكن يجب ملاحظة إن معامل الإرتباط الجزئي يعطي مقياساً لترتيب حسابي الإرتباط وليس مقياساً لقيمته ، فمجموع معاملات الإرتباط الجزئي بين المتغير التابع وكل المتغيرات المستقلة لا يساوي (1) بالضرورة .

وهناك عدة معاملات للإرتباط الجزئي في النموذج الخطي لثلاثة متغيرات . وهي :

1 - معامل الإرتباط الجزئي بين Y و X_1 ،

$$\boxed{r_{YX_1} = \frac{\sum x_1 y}{\sqrt{\sum x_1^2} \cdot \sqrt{\sum y^2}}}$$

2 - معامل الإرتباط الجزئي بين Y و X_2 .

$$\boxed{r_{YX_2} = \frac{\sum x_2 y}{\sqrt{\sum x_2^2} \cdot \sqrt{\sum y^2}}}$$

3 - معامل الإرتباط الجزئي بين المتغيرين المستقلين X_1 ، و X_2 .

$$\boxed{r_{X_1X_2} = \frac{\sum x_1 x_2}{\sqrt{\sum x_1^2} \cdot \sqrt{\sum x_2^2}}}$$

④ - معامل الإرتباط الجزئي $r_{YX_1 \cdot X_2}$.

$$\boxed{r_{YX_1 \cdot X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2} \cdot r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r^2_{X_1X_2}} \cdot \sqrt{1 - r^2_{YX_2}}}}$$

لا تحفظ

⑤ - معامل الإرتباط الجزئي $r_{YX_2 \cdot X_1}$.

$$\boxed{r_{YX_2 \cdot X_1} = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1} \cdot r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r^2_{X_1X_2}} \cdot \sqrt{1 - r^2_{YX_1}}}}$$

لا تحفظ

س :- أوجد قيم معاملات الإرتباط الجزئية الخمسة المذكورة في أعلاه .

ج :-

① - $$\because r_{YX_1} = \frac{\sum x_1 y}{\sqrt{\sum x_1^2} \sqrt{\sum y^2}}$$

بالتعويض

$$r_{YX_1} = \frac{956}{\sqrt{576} \sqrt{1634}}$$

$$\therefore \boxed{r_{YX_1} \simeq 0.985}$$

② - $$\because r_{YX_2} = \frac{\sum x_2 y}{\sqrt{\sum x_2^2} \sqrt{\sum y^2}}$$

بالتعويض

$$r_{YX_2} = \frac{900}{\sqrt{504} \cdot \sqrt{1634}}$$

$$\therefore \boxed{r_{YX_2} \simeq 0.992}$$

$$\because r_{X_1X_2} = \frac{\sum x_1 x_2}{\sqrt{\sum x_1^2}\ \sqrt{\sum x_2^2}} \quad -③$$

بالتعويض

$$= \frac{524}{\sqrt{504}\ \sqrt{576}}$$

$$\therefore \boxed{r_{X_1X_2} \simeq 0.973}$$

$$r_{YX_1 \cdot X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r_{X_1X_2}^2} \cdot \sqrt{1 - r_{YX_2}^2}} \quad -④$$

بالتعويض :-

$$= \frac{0.985 - (0.992)(0.973)}{\sqrt{1-(0.973)^2}\ \sqrt{1-(0.992)^2}}$$

$$\therefore \boxed{r_{YX_1 \cdot X_2} \simeq 0.69}$$

$$r_{YX_2 \cdot X_1} = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1} r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r^2_{X_1X_2}} \sqrt{1 - r^2_{YX_1}}} \quad -⑤$$

بالتعويض

$$= \frac{0.992 - (0.985)(0.973)}{\sqrt{1 - (0.973)^2} \sqrt{1 - (0.985)^2}}$$

$$\therefore \boxed{r_{YX_2 \cdot X_1} \simeq 0.85}$$

ومن نتائج معاملات الارتباط الجزئي يتضح بأن المتغير المستقل (X_2) أكثر أهمية (أكثر تأثيراً) من المتغير المستقل الآخر (X_1) في تفسير التغيرات في المتغير التابع (Y) . وذلك بسبب أن قيمة معامل الارتباط الجزئي بين X_2 و Y $(r_{YX_2} = 0.992)$ أكبر من قيمة معامل الارتباط الجزئي بين X_1 و Y $(r_{YX_1} = 0.985)$. ويتضح ذلك كذلك من أن قيمة $r_{YX_2 \cdot X_1}$ والتي تساوي (0.85) أكبر من قيمة $r_{YX_1 \cdot X_2}$ والتي هي (0.69) .

ثانياً:- معامل التحديد المتعدد (R^2) :-

إن معامل التحديد المتعدد (R^2) هو نسبة التغير في المتغير التابع الذي تفسره التغيرات في المتغيرين المستقلين X_1 و X_2 . ويحسب كما يلي:-

$$\boxed{R^2 = \frac{\sum \hat{y}^2}{\sum y^2}}$$

أو :-

$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y^2}}$$

أو :-

$$\boxed{R^2 = \frac{\hat{b}\sum yx_1 + \hat{c}\sum yx_2}{\sum y^2}}$$

وبما إن إضافة متغيرات مستقلة إلى النموذج يُزيد من قيمة R^2 (بسبب زيادة $\sum \hat{y}^2$) ، فمن الأفضل الاعتماد على R^2 المعدّلة أو ($\bar{R}^2$) :-

$$\boxed{\bar{R}^2 = 1 - \frac{(1-R^2)(n-1)}{n-K}}$$

س :- أوجد R^2 ، $\bar{R}^2$ للمثال السابق .

ج :-

$$\because R^2 = 1 - \frac{\sum e^2}{\sum y^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{13.6704}{1634} \simeq 1 - 0.00836$$

$$\therefore \boxed{R^2 \simeq 0.9916}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(1-R^2)\cdot(n-1)}{n-K}$$

$$= 1 - \frac{(1-0.9916)\cdot(10-1)}{10-3}$$

$$= 1 - \frac{(0.0084)(9)}{7}$$

$$\therefore \boxed{\bar{R}^2 \simeq 0.9892}$$

إختبار المعنوية الكلية للإنحدار :

يمكن إختبار المعنوية الكلية للإنحدار بإستخدام إختبار F بدرجات حرية $K-1$ و $n-K$ (حيث أن K هي عدد المعالم المقدرة وهي 3 ، و n عدد المشاهدات). وكما يلي :

$$\boxed{F_{K-1,\, n-K} = \frac{\sum \hat{y}^2/(K-1)}{\sum e_i^2/(n-K)}}$$

أو

$$F = \frac{R^2/(K-1)}{(1-R^2)/(n-K)}$$

وإذا تجاوزت قيمة F المحتسبة قيمة (F) الجدولية (عند مستوى المعنوية ودرجات الحرية المحددة) ممكن أن يكون هذا دليلاً على وجود علاقة معنوية بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة. ولكن يجب الإنتباه الى أنه من الممكن أن تكون (F) المحتسبة كبيرة وليست هناك أي معلمة معنوية إحصائياً. ويحدث هذا عند وجود علاقة إرتباط (٣) مرتفع بين المتغيرات المستقلة بعضها البعض (كما سيتم شرحها لاحقاً).

س ٤- إختبر المعنوية الكلية للإنحدار المقدّر في المثال السابق بمستوى معنوية (5%) . علماً بأن (F) الجدولية بدرجات حرية df=2,7 هي F=4.74 .

ج-

$$\therefore F_{2,7} = \frac{R^2 / (K-1)}{(1-R^2)/(n-K)}$$

$$\therefore F_{2,7} = \frac{0.9916 / (3-1)}{(0.0084)/(10-3)}$$

$$= \frac{0.4958}{0.0012}$$

$$\therefore \boxed{F_{2,7} = 413.167}$$

وبما إن قيمة F المحتسبة تفوق القيمة الجدولية $F_{2,7}=4.74$ عند مستوى معنوية (5%)، فإن العلاقة الكلية معنوية .

س : أوجد مرونة الإنتاج (Y) بالنسبة لكل من (X_1) و (X_2) .

ج :

$$E_{x_1} = \hat{b} \cdot \frac{\bar{X}_1}{\bar{Y}}$$

$$E_{x_1} = 0.65\left(\frac{18}{57}\right) \simeq \boxed{0.205}$$

$$E_{X_2} = \hat{C} \cdot \frac{\bar{X}_2}{\bar{Y}}$$

$$= 1.11 \left(\frac{12}{57} \right)$$

$$E_{X_2} \simeq \boxed{0.234}$$

يتضح بأن مرونة الإنتاج بالنسبة لكلا المتغيرين المستقلين مرونة منخفضة (أي إن الانتاج غير مرن لكلا المتغيرين).

أساليب وتطبيقات أخرى في تحليل الإنحدار

أولاً:- شكل الدالة :-

س: كيف يتم تقرير شكل الدالة ؟

ج: في بعض الأحيان يمكن أن تقترح النظرية الإقتصادية شكل الدالة لعلاقة إقتصادية ما. فمثلاً إن منحنى متوسط التكاليف الكلية أو المتغيرة (في الأجل القصير) يأخذ شكل الحرف U ، وإن منحنى متوسط التكاليف الثابتة يتناقص بإستمرار ويقترب شيئاً فشيئاً من المحور الأفقي (كمية الإنتاج) حيث يُقسم إجمالي التكاليف الكلية الثابتة على عدد أكبر فأكبر من الوحدات المنتجة. أو قد يشير شكل إنتشار النقاط أيضاً إلى شكل الدالة المناسب في حالة علاقة بين متغيرين. وعندما لا يتوفر إقتراح بشكل العلاقة فإنه عادة ما يتم تجربة الدالة الخطية لبساطتها.

وتُحوَّل الدوال غير الخطية إلى الشكل الخطي حتى يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى الإعتيادية (OLS) .

وفيما يلي أكثر أشكال الدوال الإقتصادية شيوعاً :-

١ - الدالة اللوغاريتمية المزدوجة :-

عندما تكون الدالة بشكل أسي مثل :-

$$Y = a \cdot X^{b} \cdot e^{u}$$

يمكن تحويلها للشكل الخطي بعد تحويل كل قيم المتغيرات إلى شكل لوغاريتمي (ln) ، ثم تقدَّر الدالة

بطريقة (OLS) وتكتب كمايلي :-

$$\ln Y = \ln \alpha + b \ln X + \ln e^{\mu}$$

أو إختصاراً

$$Y^* = \alpha^* + b X^* + \mu$$

$X^* = \ln X$ ، $Y^* = \ln Y$ ، $\ln$: اللوغاريتم الطبيعي الأساسي .

ومن أمثلة هذه الدوال ، دالة كوب - دوغلاس للإنتاج

$$Q = T . K^{\alpha} . L^{\beta} . e^{\mu}$$

وتقدر كمايلي :-

$$\ln Q = \ln T + \alpha \ln K + \beta \ln L + \ln e^{\mu}$$

تكتب إختصاراً :

$$Q^* = T^* + \alpha K^* + \beta L^* + \mu$$

ومن سمات الدالة اللوغاريتمية المزدوجة مايلي :-

أ - إن معالم الميل (معاملات المتغيرات) تمثل المرونات . فمثلاً بعد تقدير دالة كوب - دوغلاس ، فإن قيمة (α) تمثل مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال (E_{QK}) ، وإن قيمة (β) تمثل مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل (E_{QL}) .

ب . إن قيمة ($\hat{\alpha}$) (والتي هي العدد المقابل للوغاريتم العدد الثابت $\hat{\alpha}^*$ المقدّر) يكون مقداراً متحيزاً . ولذلك لاتكون $\hat{\alpha}$ محل إهتمام أساسي ، أي إنها تهمل .

تمرين :-

إذا كُتبت دالة الكمية المطلوبة في الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة ، وهي :

$$Q = a P^b Y^c e^u$$

حيث إن Q: هي الكمية المطلوبة ، P: هو السعر ، Y: هو الدخل .

فاثبت إن :- (أ)- b هي مرونة الطلب السعرية (E_d) .

(ب)- C هي مرونة الطلب الدخلية (E_Y) .

الحل :-

(أ) $$\because E_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$\frac{dQ}{dP} = b\left(a P^{b-1} \cdot Y^c e^u\right)$$

$$= b\left(a P^b Y^c e^u\right) . P^{-1}$$

$$= b\left(\frac{a P^b Y^c e^u}{P}\right)$$

$$\therefore \frac{dQ}{dP} = b \cdot \frac{Q}{P}$$

$$\therefore E_d = b \frac{\cancel{Q}}{\cancel{P}} \cdot \frac{\cancel{P}}{\cancel{Q}}$$ بالتعويض

$$\therefore \boxed{E_d = b}$$ وهو المطلوب

(ب) $$\because E_Y = \frac{dQ}{dY} \cdot \frac{Y}{Q}$$

$$\frac{dQ}{dY} = C\,(a P^{b} Y^{c-1} e^{\mu})$$

$$= C\,(a P^{b} Y^{c} e^{\mu}) \cdot Y^{-1}$$

$$= C\left(\frac{a P^{b} Y^{c} e^{\mu}}{Y}\right)$$

$$\frac{dQ}{dY} = C\left(\frac{Q}{Y}\right)$$

بالتعويض

$$E_Y = C\,\frac{\cancel{Q}}{\cancel{Y}} \cdot \frac{\cancel{Y}}{\cancel{Q}}$$

$$\therefore \boxed{E_Y = C}$$ وهو المطلوب

② الدالة نصف اللوغاريتمية :

هي الدالة التي يمكن تحويلها إلى الشكل الخطي بعد تحويل إما قيم المتغير التابع أو قيم المتغيرات المستقلة إلى قيم لوغاريتمية ثم تُقدَّر الدالة بطريقة (OLS) .

وتكتب الدالة نصف اللوغاريتمية كما يلي :

أما $\ln Y = a + bX + \mu$

واختصاراً $Y^{*} = a + bX + \mu$

أو $Y = a + b\ln X + \mu$

واختصاراً $Y = a + bX^{*} + \mu$

ويتم إستخدام هذا الشكل من الدوال عندما يميل إما المتغير التابع مثلاً (أو المتغير المستقل فقط) للتغير بمعدلات ثابتة:
على سبيل المثال في مسائل السلاسل الزمنية عندما يتغير الزمن بثبات متنامية وتتغير قيم المتغير التابع بمعدلات تقترب من الثبات.

تمرين :-
إذا كانت الكمية المطلوبة من سلعة ما (Y)، وسعرها (X_1)، ودخل المستهلك (X_2) في الفترة 1988 - 2002 هي كما في الجدول التالي:

السنة	Y	X_1	X_2
1988	40	9	400
1989	45	8	500
1990	50	9	600
1991	55	8	700
1992	60	7	800
1993	70	6	900
1994	65	6	1000
1995	65	8	1100
1996	75	5	1200
1997	75	5	1300
1998	80	5	1400
1999	100	3	1500
2000	90	4	1600
2001	95	3	1700
2002	85	4	1800

فإستخدم بيانات هذا الجدول، وطبق طريقة (OLS) لتقدير دالة الطلب بعد تحويلها إلى شكل خطي لوغاريتمي مزدوج. ثم إختبر معنوية المعالم (إختبار t) وأوجد (R^2).

الحل :-

$$\ln Y = 1.96 - 0.26 \ln X_1 + 0.39 \ln X_2$$
$$(-3.54) \qquad (6.64)$$

$$R^2 \cong 0.97$$

③ - الدالة المقلوبة :

وهي الدالة التي يتم تحويلها إلى الشكل الخطي بعد تحويل قيم المتغير المستقل إلى قيم مقلوبة ، ثم تُقدَّر الدالـة بطريقة (OLS) . وتكتب الدالة المقلوبة كمايلي :

$$\hat{Y} = \hat{a} + \frac{\hat{b}}{X} + \mu$$

واختصاراً

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X^* + \mu$$

حيث إن :

$$X^* = \frac{1}{X}$$

④ - الدوال الأسية (كثيرة الحدود) :

وهي الدوال التي تُحوَّل إلى الشكل الخطي بعد إضافة متغير مستقل آخر هو بالحقيقة نفس قيم المتغير المستقل الأول ولكنها مرفوعة لقوة (أس) معينة حسب شكل الدالة الحقيقي (المتعارف عليه) ثم تقدَّر بطريقة (OLS) .
فمثلاً عند تقدير دالة متوسط التكاليف الكلية (ATC) يتم تربيع قيم كمية الإنتاج (Q) ويضاف كمتغير مستقل آخر وهو (Q^2) . وهكذا بالنسبة للدوال الأسية الأخرى .
وتكتب الدالة التربيعية على سبيل المثال كمايلي :

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X + \hat{c}X^2 + \mu$$

واختصاراً

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X + \hat{c}Z + \mu$$

حيث إن :

$$Z = X^2$$