وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الفراهيدي

كلية الادارة والاقتصاد

قسم المحاسبة

محاضرات مادة : (بحوث العمليات)

لطلبة المرحلة: الثانية/ الكورس الثاني

القسم: المحاسبة

مدرس المادة : م. محمد كاظم

العام الدراسي : 2023-2024

Operation Research

مدخل في بحوث العمليات: Operation Research

المقدمة :

تعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي احرزت نجاحاً واسعاً في المجالات العسكرية والمدنية ، وتمتد الجذور التاريخية لهذا الحقل من حقول المعرفة المتخصصة الى اوائل الحرب العالمية الثانية عندما واجهت القوات البريطانية العديد من المشاكل مما ادى بها الى استخدام اساليب بحوث العمليات لحل العديد من المشاكل التي تواجه الادارة في العمليات الحربية وفي عمليات ادارة الاعمال والادارة الحكومية وذلك لتحقيق الاستخدام الامثل للموارد البشرية .

وبعدها اتسعت رقعة تطبيق OR خلال عام ١٩٤١ نفسه لتشمل قوات الحلفاء وذلك بسبب النجاح الكبير الذي احرزته القوات البريطانية في حل المعضلات الحربية . لذلك قامت القوات الامريكية بتكوين لجنة مماثلة بهدف معالجة مشكلة نقل المعدات والمؤن والذخائر الحربية ومعالجة مشاكل ايجاد انماط جديدة للطيران الحربي وتخطيط عملية زرع الالغام وغيرها.

تعريف بحوث العمليات Operation Research: OR

يدور موضوع بحوث العمليات حول استخدام اساليب التحليل الكمي لمساعدة الادارة في اتخاذ القرارات حول المشاكل التي تواجهها مع الاعتماد بالدرجة الاولى على الاساليب الرياضية المتقدمة . عند ادارة انظمة كبيرة مع القوى العاملة ، المعدات ، المواد تلاولية ، الاموال في المصانع والمؤسسات الحكومية والقوات المسلحة.

وبعبارة اخرى يمكن تعريف بحوث العمليات " بأنها طريقة علمية تجهز الادارة بقرارات كمية ، حول المشاكل التي تجابهها .

خطوات دراسة بحوث العمليات :

يتضمن اسلوب بحوث العمليات خمسة خطوات اساسية وهي على الترتيب:

١. تعريف المشكلة قيد الدرس.
٢. صياغة النموذج الملائم للمشكلة.
٣. حل النموذج .
٤. اختبار النموذج والحل الناتج منه.
٥. وضع الحل موضع التطبيق العملي.

١.تعريف المشكلة:

يتم تعريف المشكلة وذلك بتحديد كل من الهدف والبدائل والقيود، بالنسبة للهدف قد يتمثل في زيادة الارباح او زيادة الطاقة الانتاجية او تقليل التكاليف.

٢.بناء النموذج :

ان عمل النموذج هو عملية تمثيل المكونات ،المشكلة والعوامل المؤثرة والظروف المحيطة بها بشكل او بصيغة تساعد على فهمها وكلمة النموذج تعني عرض مبسط للواقع بشكل او بصيغة تساعدنا من التوصل الى قرار سليم .وهناك انواع من النماذج منها الرياضية والفيزيائية والتنظيمية.

٣.حل النموذج :

بعد صياغة النموذج الملائم للمسألة تأتي المرحلة التالية والمتمثلة بحل النموذج لاستخراج مجموعة قيم المتغيرات ،يتم الحل بتطبيق اساليب البرمجة الرياضية او البرامج الاحتمالية او شبكات الاعمال .

٤. اختبار النموذج والحل المستخرج :

ان حل النموذج لا يعني نهاية المسألة ، اذ يجب ان يختبر هذا الحل وذلك لإظهار قدرة النموذج في تمثيله للمسألة ، يتم الاختبار باستخدام بيانات تأريخيه وقد يتطلب الامر تحوير النموذج واعادة اختباره الى ان تزول كافة النواقص الموجودة فيه.

٥.وضع الحل موضع التطبيق العملي :

تأتي هذه الخطوة بعد التأكد من صلاحية النموذج وملائمته للبيانات وتتكون من ترجمة الحل وتحويله الى اساليب عمل ومراقبته وتقديمها الى الجهات المختصة بشكل واضح.

البرمجة الخطية: Linear programming (LP)

تعتبر البرمجة الخطية احدى نماذج البرمجة الرياضية التي تعالج مسألة تخصيص او توزيع للموارد او الطاقات المحدودة لتحقيق هدف معين ويعبر عن هذا الهدف بدالة خطية مستخدمة لوصف العلاقة بين متغيرين او اكثر وهذه العلاقة مباشرة وتتغير بنفس النسبة اي انه اذا تغيرت ساعات الانتاج بنسبة ١٠% يتغير الانتاج بنسبة ١٠%ايضاً.

تسمى هذه الدالة الخطية بدالة الهدف Objective Function فقد تكون دالة ربح او دالة كلفة او دالة انتاج وتخضع هذه الدالة الى قيود مفروضة عبارة عن معادلات او متباينات تسمى القيود Constraints تعبر عن المواد الاولية ،ساعات العمل ، طاقة المكائن ، عدد عمال ...الخ.

وقيد عدم السلبية الذي يكون دائماً بشكل اكبر او يساوي .

وبهذا نستنتج ان نموذج البرمجة الخطية يتكون من ثلاث مكونات رئيسية هي :

١.دالة الهدف Objective Function وتكون اما تعظيم ارباح ترمز بالرمز Max او تقليل التكاليف ونرمز لها بالرمز Min

٢. القيود Constraints وتكون بشكل اكبر او يساوي او مساواة او اقل او يساوي $\geq$ $=$ $\leq$

٣.قيد عدم السلبية ويكون دائماً بشكل اكبر او يساوي اي بمعنى ان قيمته موجبة دائماً

وبهذا يمكننا من تعريف البرمجة الخطية بالتعريف التالي " وهي أسلوب رياضي يتم من خلاله تعظيم هدف (Objective) معين او تصغير هدف معين ، طبقاً الى شروط خاصة تسمى القيود (Constraints) "، وقبل ذلك لا بد من تعريف الصيغة العامة لنموذج (L.P) .

Max or Min Z= C1 X1+ C2 X2 +.......+ Cn Xn

Subject to:

$$a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}\ \ x_n\ (\le\ \ =\ \ \ge) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}\ x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}\ \ x_n\ (\le\ \ =\ \ \ge) b_1$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}\ x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}\ \ x_n\ (\le\ \ =\ \ \ge) b_m$$

Were: $X_j \ \ \ge \ \ 0$

$$b_j \ \ \ge \ \ 0$$

اما الصيغة الرياضية العامة لنموذج البرمجة الخطية L.P فهي كما يلي :

Max or Min $Z_0 = \sum_{j=1}^{n} Cj\ Xj$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j (\le\ \ =\ \ \ge) b_j$$

$$X_j \ge 0$$

حيث ان :

i : تمثل عدد القيود

j : تمثل عدد المتغيرات

a_{ij} : المعاملات الفنية

امثلة عامة عن نماذج للبرمجة الخطية :

Max Z= $10X_1 + 7X_2$

s.to

$$2X_1 + 5X_2 \le 10$$
$$6X_1 + 6X_2 \le 15$$
$$5X_1 + 8X_2 \le 64$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Min Z= $25X_1 + 75X_2 + 15X_3$

s.to

$$10X_1 + 15X_2 + 6X_3 \ge 40$$
$$16X_1 + 16X_2 + 4X_3 \ge 30$$
$$12X_1 + 8X_3 \ge 44$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

بناء أنموذج برمجة خطية :Building Linear programming (B L P)

يتطلب حل المشكلة بأسلوب البرمجة الخطية ان تتوفر الشروط الاتية :

١-تحديد دالة الهدف Objective Function:

٢.تحديد القيود Constraints:

٣.شرط عدم السلبية Non Negative:

والامثلة التالية التي تبين كيفية بناء أنموذج برمجة خطية .

مثال١/ شركة الوركاء للصناعات الخشبية تصنع رفوف الكتب ومكاتب ، يتطلب كل رف ٤ ساعة لأعمال النجارة و٢ ساعة لأعمال الطلاء ، ويتطلب كل مكتب ٢ ساعة لأعمال النجارة ،و٤ساعة لأعمال الطلاء. وتمتلك الشركة بحد اقصى ٦٠ ساعة من اعمال النجارة و٤٨ ساعة من اعمال الطلاء متاحة في كل اسبوع ،وانها تحقق ارباحاً قُدرها ٨ $ لكل رف و ٦$ لكل مكتب .

وكما مبين في الجدول ادناه:

	رفوف الكتب	المكاتب	الوقت المتاح
النجارة	٤	٢	٦٠
الطلاء	٢	٤	٤٨
الربح	٨	٦	

المطلوب : استخدم البرمجة الخطية لأيجاد عدد الرفوف وعدد المكاتب المطلوب ان تصنع ؟

الحل: نفرض ان X1 تمثل رفوف الكتب

X2 تمثل المكاتب

Max Z= $8X_1 + 6X_2$

s.to

$$4X_1 + 2X_2 \le 60$$
$$2X_1 + 4X_2 \le 48$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

مثال٢/ تقوم إحدى مصانع التجارة لنجارة الخشب بإنتاج الكراسي والمناضد وكل نوع من هذه المنتجات يحتاج إلى مواد أولية وان كلفة كل منتج تختلف عن الأخر ، وكما مبين في الجدول التالي :

المطلوب : بناء أنموذج رياضي لإنتاج هذا المصنع أو تحديد البرنامج الأمثل للإنتاج بحيث تكون التكاليف اقل ما يمكن ؟

الاحتياجات الأسبوعية	المناضد	الكراسي	نوع المواد الأولية
20	3	2	A
25	2	1	B
60	3	5	ساعات العمل
	30$	40$	كلفة الوحدة الواحد

الحل:

اولاً: نفرض عدد الوحدات المنتجة من الكراسي هو X1

و   نفرض عدد الوحدات المنتجة من المناضد هو X2

ثانياً: نبدأ ببناء نموذج البرمجة الخطية للمصنع، علماً ان نموذج البرمجة الخطية يتكون من ثلاث مكونات رئيسية وهي دالة الهدف والقيود وقيد عدم السلبية .

Min Z= $40X_1 + 30X_2$

s.to

$$2X_1 + 3X_2 \geq 20$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 25$$
$$5X_1 + 3X_2 \geq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال٣/ مصنع ينتج منتجين يستدعي ورود كل منتج إلى ثلاث أقسام إنتاجية على التوالي لغرض صناعتها، الوقت المتاح في كل قسم إنتاجي لها والربح مبين في الجدول أدناه :

نوع المنتج	القسم الإنتاجي الأول	القسم الإنتاجي الثاني	القسم الإنتاجي الثالث	الربح
A	20	16	5.5	80
B	15	16	28	75
الساعات المتاحة للعمل	40	35	61	

المطلوب : بناء أنموذج رياضي لانتاج هذا المصنع أو تحديد البرنامج الأمثل للإنتاج ، أو احسب كمية الإنتاج الممكنة من كل سلعة بحيث تحقق أعلى ربح ممكن ؟

الحل:

اولاً: نفرض ان

X1 كمية الانتاج من السلعة الاولى

X2 كمية الانتاج من السلعة الثانية

ثانياً: نبدأ ببناء نموذج البرمجة الخطية للمصنع.

Max Z= $80X_1 + 75X_2$

s.to

$$20X_1 + 15X_2 \le 40$$
$$16X_1 + 16X_2 \le 35$$
$$5.5X_1 + 28X_2 \le 61$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

مثال٤/ سالي مزارعة تمتلك مساحة ٤٥ هكتار من الارض وتريد ان تزرع اما حنطة او ذرة في كل هكتار ،اذا زرعت حنطة تربح ٢٠٠ $ وكل هكتار من الذرة تربح ٣٠٠$ ، وان ما متاح من المواد هو ١٠٠ عامل و١١٠ طن من السماد وكما مبين في الجدول ادناه:

المورد المتاح	الحنطة	الذرة
العمال	٣ عمال	٢ عمال
السماد	٢ طن	٤ طن

المطلوب :

استخدام البرمجة الخطية لتحديد كيف ان سالي تستطيع تعظيم الربحية على ارضها؟

الحل:

اولاً:

نفرض ان

X1 تمثل كمية ربح الحنطة

X2 تمثل كمية ربح الذرة

ثانياً: نبدأ ببناء نموذج البرمجة الخطية

Max Z= $200X_1 + 300X_2$

s.to

$$3X_1 + 2X_2 \leq 100$$
$$2X_1 + 4X_2 \leq 110$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال٥/ مصنع ينتج نوعين من المنتجات (P1,P2)باستخدام ثلاث انواع من المكائن (M1,M2,M3) وان انتاج المنتج P1يمر من خلال الماكنتين M1,M2 وانتاج المنتوج P2 يجب ان يمر من خلال المكائن الثلاثة والجدول الاتي يمثل الوقت الذي يستغرقه في انتاج وحدة واحدة من كل منتوج في الساعة وكما مبين في الجدول ادناه:

	M1	M2	M3
P1	0.25	0.4	0
P2	0.5	0.2	0.8

وان كل ماكنة من المكائن يجب ان تعمل على الاكثر ٤٠ ساعة اسبوعياً ،فإذا علمت ان المصنع يحصل على ربح مقداره ٢ $ لكل وحدة منتجة من المنتج P1 و٣$ لكل وحدة منتجة من المنتج P2.

المطلوب :

صياغة البرمجة الخطية وحساب الوحدات الواجب انتاجها من كل منتوج في الاسبوع لتعظيم ربح المصنع ؟

الحل:

اولاً:

نفرض ان

X1 عدد الوحدات المنتجة من المنتج الاول

X2 عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني

ثانياً: نبدأ ببناء نموذج البرمجة الخطية

Max Z= $2X_1 + 3X_2$

s.to

$$o.25X_1 + 0.5X_2 \leq 40$$
$$0.4X_1 + 0.2X_2 \leq 40$$
$$0.8X_2 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال 6 واجب بيتي / شركة كلكامش للصناعات الالكترونية تقوم بأنتاج المنتجات (الهواتف النقالة ،واجهزة لوحية، وحواسيب محمولة) وترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب انتاجها من كل منتج بحيث تحصل على اكبر ربح ممكن ويتطلب انتاج الوحدة الواحدة من كل منتج من المنتجات الثلاثة المرور بثلاثة مراحل انتاجية هي (A) مرحلة التصنيع و (B)مرحلة التجميع ،و (C)مرحلة التغليف ، الوقت المتاح بالدقائق في كل قسم إنتاجي للمنتجات وكذلك الربح المتحقق مبين في الجدول أدناه :

الوقت المتاح	وحواسيب محمولة	اجهزة لوحية	الهواتف النقالة	المراحل الانتاجية
360	0	2	3	(A) مرحلة التصنيع
355	5	0	4	(B)مرحلة التجميع
340	3	5	3	(C) مرحلة التغليف
	8	4	6	الربح

المطلوب : بناء أنموذج رياضي لانتاج المصنع أو تحديد البرنامج الأمثل للإنتاج بحيث تحقق أعلى ربح ممكن بأستخدام نموذج البرمجة الخطية ؟

صيغ البرمجة الخطية

١.الصيغة القانونية Canonical Form:

ومن شروط أو خصائص هذه الصيغة هي :

١-دالة الهدف يجب إن تكون من نوع Max

٢-جميع القيود يجب إن تكون من نوع اقل أو يساوي إي ($\leq$)

Example 1 : Write the following (L.P.P) in **Canonical form ?**

حول نموذج البرمجة الخطية الى الصيغة القانونية

Min Z= $2X_1+3X_2+6X_3$

s.to

$$6X_1+2X_2+X_3\leq 40$$
$$8X_1-3X_2+2X_3\geq -60$$
$$|X_1-3X_2|\leq 70$$
$$2X_1+X_3\leq 63$$

$$X_1,X_2,X_3\geq 0$$

Solution:

Max Z= $-2X_1-3X_2-6X_3$

$$sto:$$
$$6X_1+2X_2+X_3\leq 40$$
$$-8X_1+3X_2-2X_3\leq 60$$
$$X_1-3X_2\leq 70$$
$$-X_1+3X_2\leq 70$$
$$2X_1+X_3\leq 63$$

$$X_1,X_2,X_3\geq 0$$

Example 2 : Write the following (L.P.P) in **Canonical form ?**

Max Z= $2X_1 + 7X_2$

s.to

$$3X_1 + 6X_2 \geq -6$$
$$6X_1 - 2X_2 = 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

Max Z= $2X_1 + 7X_2$

s.to

$$-3X_1 - 6X_2 \leq 6$$
$$6X_1 - 2X_2 \leq 4$$
$$6X_1 - 2X_2 \geq 4$$
$$-6X_1 + 2X_2 \leq -4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Example 3 : Write the following (L.P.P) in Canonical form ?

Min Z= $2X_1 + 4X_2 + 8X_3$

s.to

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 8$$
$$5X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 6$$
$$|X_1 - X_2| \leq 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

Max Z= $-2X_1-4X_2-8X_3$

s.to

$$3X_1-2X_2+X_3\leq 8$$
$$-5X_1-2X_2-2X_3\leq -6$$
$$X_1-X_2\leq 10$$
$$-X_1+X_2\leq 10$$

$$X_1,X_2,X_3\geq 0$$

Example 4 : Write the following (L.P.P) in Canonical form ?

Max Z= $4X_1+7X_2+10X_3+4X_4$

s.to

$$6X_1-2X_2-X_3+5X_4\geq -15$$
$$2X_1+5X_2+3X_3\leq 6$$
$$4X_1+4X_2+2X_3\leq 20$$

$$X_1,X_2,X_3,X_4\geq 0$$

<u>Solution:</u>

Max Z= $4X_1+7X_2+10X_3+4X_4$

s.to

$$-6X_1+2X_2+X_3-5X_4\leq 15$$
$$2X_1+5X_2+3X_3\leq 6$$
$$4X_1+4X_2+2X_3\leq 20$$

$$X_1,X_2,X_3,X_4\geq 0$$

Example 5 Home work: Write the following (L.P.P) in Canonical form?

Max Z= $10X_1 + 22X_2 + 17X_3$

s.to

$$2X_1 + 4X_2 + X_3 \geq 15$$
$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 14$$
$$\left| \, 8X_1 + 5X_2 + 4X_3 \, \right| \leq 19$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

٢. الصيغة القياسية Standard Form :

ومن شروط او خصائص هذه الصيغة هي :

١-دالة الهدف تكون من نوع Max او من نوع Min
٢-جميع القيود يجب ان تكون من نوع مساواة اي (=)
٣-قيم الطرف الايمن يجب ان تكون موجبة .

Example 1 : Write the following (L.P.P) in **Standard form ?**

Min Z= $3X_1 + X_2 - X_3$

s.to

$$2X_1 + 4X_2 + 8X_3 \le 9$$
$$5X_1 + 3X_2 \ge -18$$
$$3X_1 + 2X_2 - 5X_3 = 15$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Solution:

Min Z= $3X_1 + X_2 - X_3$

s.to

$$2X_1 + 4X_2 + 8X_3 + S1 = 9$$
$$-5X_1 - 3X_2 \le 18$$
$$-5X_1 - 3X_2 + S2 = 18$$
$$3X_1 + 2X_2 - 5X_3 = 15$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \ge 0$$

Example 2 : Write the following (L.P.P) in standard form ?

Max Z= $14X_1 + 7X_2 + 10X_3$

s.to

$$3X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le -9$$
$$X_1 + 4X_2 \ge 10$$
$$4X_1 + 4X_2 = 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Solution:

Max Z= $14X_1 + 7X_2 + 10X_3$

s.to

$$3X_1 + 2X_2 + 3X_3 + S_1 = -9$$
$$-3X_1 - 2X_2 - 3X_3 - S_1 = 9$$
$$X_1 + 4X_2 - S_2 = 10$$
$$4X_1 + 4X_2 = 20$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \ge 0$$

Example 3 : Write the following (L.P.P) in standard form ?

Min Z= $10X_1 + 2X_2 + X_3$

s.to

$$X_1 + X_2 + 2X_3 \ge 10$$
$$X_1 + 10X_2 \le 30$$
$$3X_1 + X_2 + X_3 \ge -20$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Solution:

Min Z= $10X_1 + 2X_2 + X_3$

s.to

$$X_1 + X_2 + 2X_3 - S_1 = 10$$
$$X_1 + 10X_2 + S_2 = 30$$
$$3X_1 + X_2 + X_3 - S_3 = -20$$
$$-3X_1 - X_2 - X_3 + S_3 = 20$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Example 4 : Write the following (L.P.P) in standard form ?

Max Z= $40X_1 + 22X_2 + 14X_3$

s.to

$$5X_1 + 3X_2 - 6X_3 = -20$$
$$6X_1 + 4X_2 \geq 32$$
$$4X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 22$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

Max Z= $40X_1 + 22X_2 + 14X_3$

s.to

$$-5X_1 - 3X_2 + 6X_3 = 20$$
$$6X_1 + 4X_2 - S_1 = 32$$
$$4X_1 + 2X_2 + X_3 + S_2 = 22$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

Example 5 Home work: Write the following (L.P.P) in standard form?

Max Z= $12X_1 + 25X_2 + 19X_3$

s.to

$$5X_1 + 2X_2 - X_3 = 18$$
$$X_1 - 4X_2 + 3X_3 \le -14$$
$$6X_1 - 2X_3 \ge -22$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Example 6 Home work: Write the following (L.P.P) in standard form?

Min Z= $2X_1 + 5X_2 + 7X_3 + 3X_4$

s.to

$$3X_1 - X_2 - 2X_3 + X_4 \ge -12$$
$$4X_1 - 2X_2 - 2X_3 + X_4 = -20$$
$$5X_2 - 4X_4 \ge 33$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$$

Graphical Method الطريقة البيانية

عند الطلب في السؤال حل باستخدام Graphical Method نستخدم طريقة الرسم ....كما مبين في الامثلة التالية :

Example1: using Graphical Method to Solve the following (L.P.P) Model?

max Z= $12X_1 + 16X_2$

s.to

$$2X_1 + X_2 \le 14$$
$$X_1 + 3X_2 \le 15$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Solution:

نأخذ القيد الأول ونعوض مرة X1 صفر ونستخرج قيمة X2ومرة X2صفر ونستخرج قيمة X1 وكما يلي:

$$2x1 + x2 = 14 \to 0 + x2 = 14 \to x2 = 14 \quad (0,14)$$

$$2x1 + x2 = 14 \to 2x1 + 0 = 14 \to x1 = \frac{14}{2} = 7 \quad (7,0)$$

إذن نقطة المستقيم الأول (7,14)

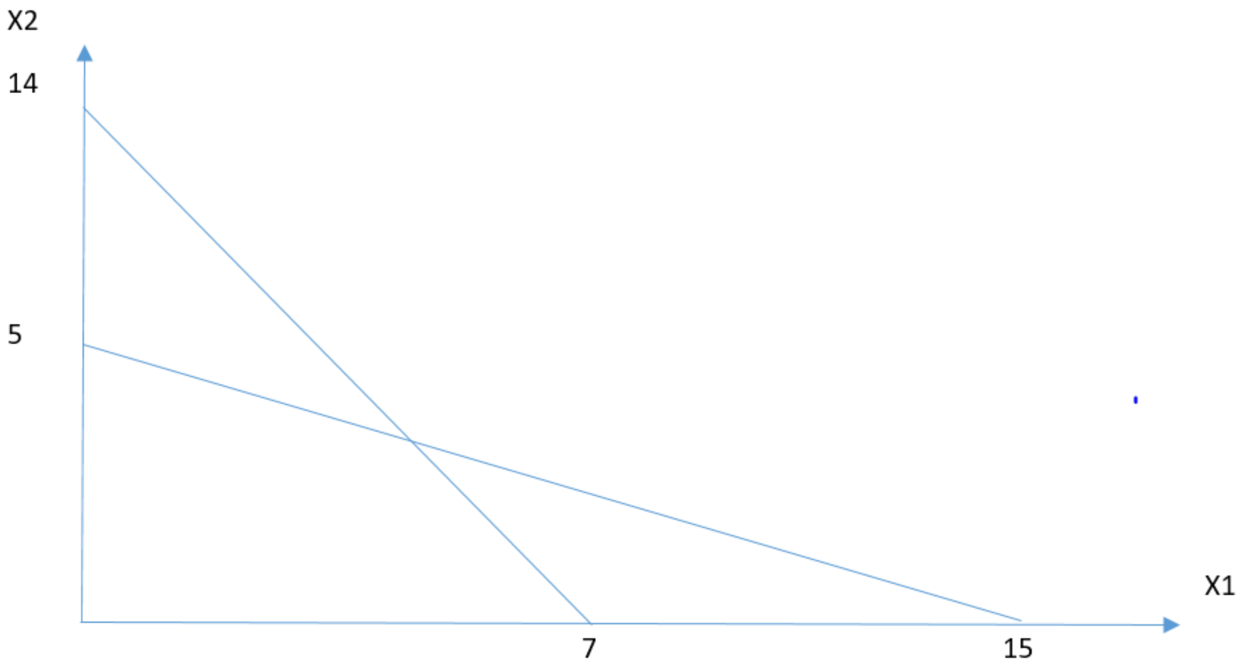
نأخذ القيد الثاني ونعوض مرة X1 صفر ونستخرج قيمة X2ومرة X2صفر ونستخرج قيمة X1 وكما يلي:

$$x1 + 3x2 = 15 \to 0 + 3x2 = 15 \to x2 = \frac{15}{3} = 5 \quad (0,5)$$

$$x1 + 3x2 = 15 \to x1 + 0 = 15 \to x1 = 15 \quad (15,0)$$

إذن نقطة المستقيم الثاني (15,5)

وألان نرسم المستقيمات المستخرجة



وألان نأخذ المستقيمان المتقاطعة ونحلها أنيا واستخراج قيم X1,X2

$$2x1 + x2 = 14 \ldots \ldots . . (1)$$

$$x1 + 3X2 = 15 \ \ldots \ldots (2) \qquad \} * 2$$

$$2x1 + x2 = 14$$

$$\mp 2x1 \mp 6X2 = \mp 30$$

$$-5X2 = -16 = x2 = \frac{-16}{-5} = 3.2 = X2$$

ونعوض قيمة x2 المستخرجة في المعادلة (2) وكما يأتي:

$$x1 + 3X2 = 15 \ \rightarrow \ x1 + 3(3.2) = 15 \ \rightarrow \ x1 + 9.6 = 15 \ \rightarrow$$

$$X1 = 15 - 9.6 \rightarrow X1 = 5.4$$

من خلال تعويض قيم X1,X2 في دالة الهدف المعطاة في السؤال نجد ان قيمة التعويض هي ١١٦

$$Max\ z = 12x1 + 16x2$$

$$= 12(5.4) + 16(3.2) = 116$$

إذن الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية في هذا السؤال هو عندما تكون قيمة X1=5.4، X2=3.2

Example2: using Graphical Method to Solve the following (L.P.P) Model?

max Z= $10X_1 + 8X_2$

s.to

$$3X_1 + 2X_2 \le 30$$
$$3X_1 + 6X_2 \le 18$$
$$6X1 \le 12$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Solution:

نأخذ القيد الأول ونعوض مرة X1 صفر ونستخرج قيمة X2ومرة X2صفر ونستخرج قيمة X1 وكما يلي:

$$3x1 + 2x2 = 30 \to 0 + 2x2 = 30 \to x2 = \frac{30}{2} = 15 \quad (0,15)$$

$$3x1 + 2x2 = 30 \to 3x1 + 0 = 30 \to x1 = \frac{30}{3} = 10 \quad (10,0)$$

إذن نقطة المستقيم الأول (10,15)

نأخذ القيد الثاني ونعوض مرة X1 صفر ونستخرج قيمة X2ومرة X2صفر ونستخرج قيمة X1 وكما يلي:

$$3x1 + 6x2 = 18 \to 0 + 6x2 = 18 \to x2 = \frac{18}{6} = 3 \quad (0,3)$$

$$3x1 + 6x2 = 18 \to 3x1 + 0 = 18 \to x1 = \frac{18}{3} = 6 \quad (6,0)$$

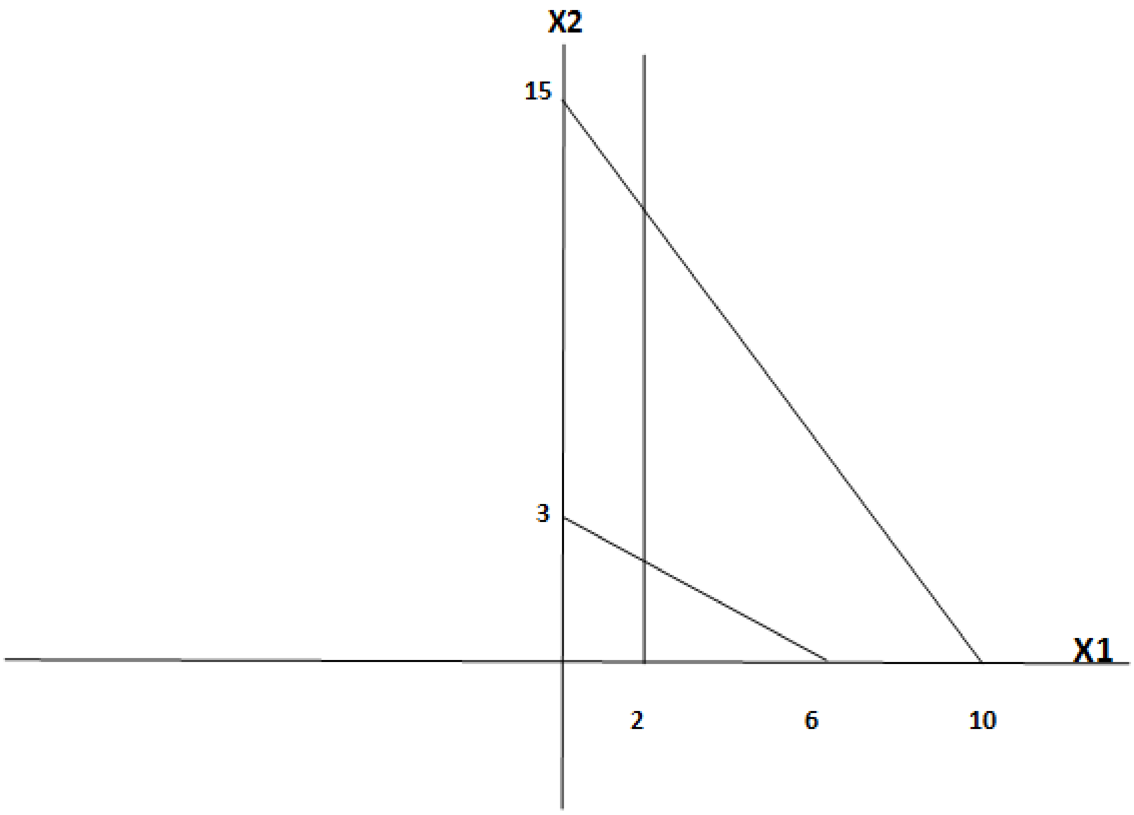
إذن نقطة المستقيم الثاني (6,3)

نأخذ القيد الثالث ,ونستخرج قيمة X1 ونستخرج وكما يلي:

$$6x1 = 12 \to\to x1 = \frac{12}{6} = 2 \quad (2,0)$$

إذن نقطة المستقيم الثالث (2,0) فقط

ألان نرسم المستقيمات الثلاثة



وألان نأخذ المستقيمان المتقاطعة ونحلها أنيا واستخراج قيم X1,X2

$$3x1 + 6x2 = 18 \ldots \ldots..(2)$$

$$6x1 = 12 \qquad \ldots \ldots \ldots (3) \rightarrow x1 = \frac{12}{6} = 2$$

ونعوض قيمة x1 المستخرجة من المعادلة (3) في المعادلة (2) وكما يأتي:

$$3x1 + 6x2 = 18 \rightarrow 3(2) + 6X2 = 18 \rightarrow 6 + 6X2 = 1 \rightarrow 6X2 = 18 - 6$$
$$\rightarrow 6X2 = 12 \rightarrow X2 = \frac{12}{6} = 2$$

من خلال تعويض قيم X1,X2 نجد ان أعلى قيمة للتعويض هي 36

إذن الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية في هذا السؤال هو عندما تكون قيمة X1=2، X2=2

Example3: using Graphical Method to solve the following (L.P.P) Model?

max Z= $13X_1 + 5X_2$

s.to

$$2X_1 + X_2 \le 4$$
$$2X_1 + 2X_2 \le 20$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

<u>Solution:</u>

نأخذ القيد الأول ونعوض مرة X1 صفر ونستخرج قيمة X2ومرة X2صفر ونستخرج قيمة X1 وكما يلي:

$$\mathbf{2x1 + x2 = 4 \to 0 + x2 = 4 \to x2 = 4 \quad (0, 4)}$$

$$\mathbf{2x1 + x2 = 4 \to 2x1 + 0 = 4 \to x1 = \frac{4}{2} = 2 \quad (2, 0)}$$

إذن نقطة المستقيم الأول (2,4)

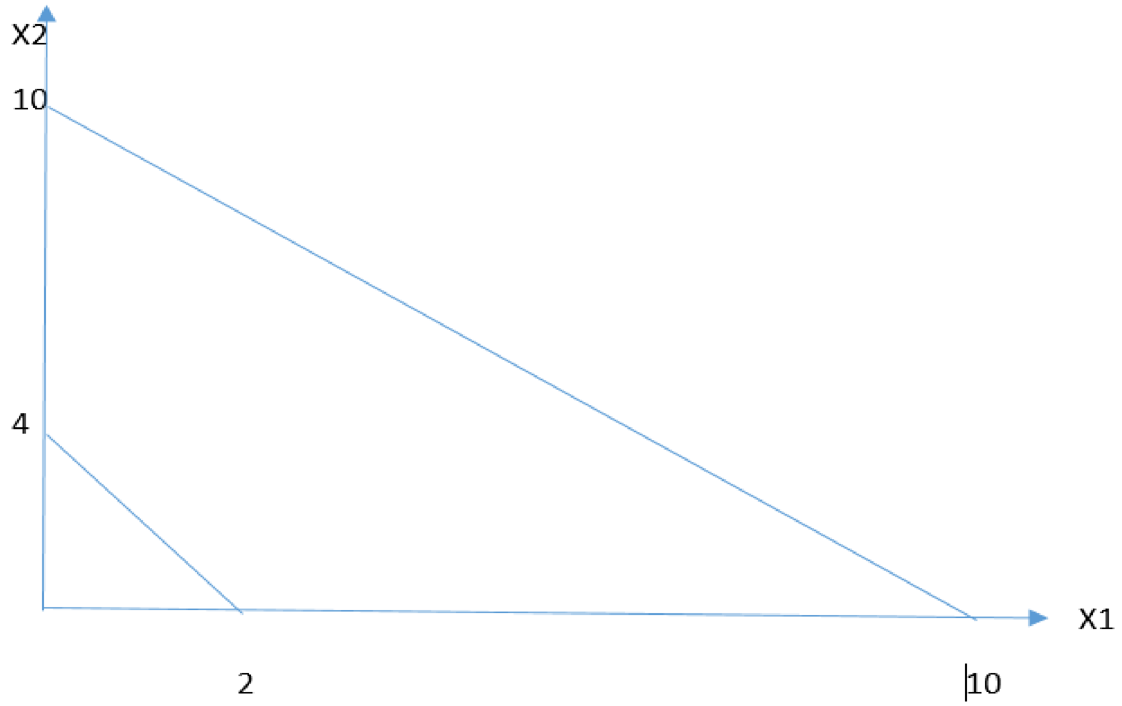
نأخذ القيد الثاني ونعوض مرة X1 صفر ونستخرج قيمة X2ومرة X2صفر ونستخرج قيمة X1 وكما يلي:

$$\mathbf{2x1 + 2x2 = 20 \to 0 + 2x2 = 20 \to x2 = \frac{20}{2} = 10 \quad (0, 10)}$$

$$\mathbf{2x1 + 2x2 = 20 \to 2x1 + 0 = 20 \to x1 = \frac{20}{2} = 10 \quad (10, 0)}$$

إذن نقطة المستقيم الثاني (10,10)

وألان نرسم المستقيمات المستخرجة



نلاحظ من خلال الرسم اعلاه عدم تقاطع المستقيمين وبهذا نستنتج لعدم وجود منطقة تقاطع بين المستقيمين اذن لاتوجد منطقة حل ومعنى ذلك لا يوجد حل مقبول لهذه المسألة او نموذج البرمجة الخطية .

Example4: using Graphical Method to solve the following (L.P.P) Model?

max Z= $16X_1 + 14X_2$

s.to

$$2X_1 + 6X_2 \le 18$$
$$5X_1 + 2X_2 \le 25$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Solution:

نأخذ القيد الأول ونعوض مرة X1 صفر ونستخرج قيمة X2ومرة X2صفر ونستخرج قيمة X1 وكما يلي:

$$2x1 + 6x2 = 18 \rightarrow 0 + 6x2 = 18 \rightarrow x2 = \frac{18}{6} = 3 \quad (0,3)$$

$$2x1 + 6x2 = 18 \rightarrow 2x1 + 0 = 18 \rightarrow x1 = \frac{18}{2} = 9 \quad (9,0)$$

إذن نقطة المستقيم الأول (9,3)

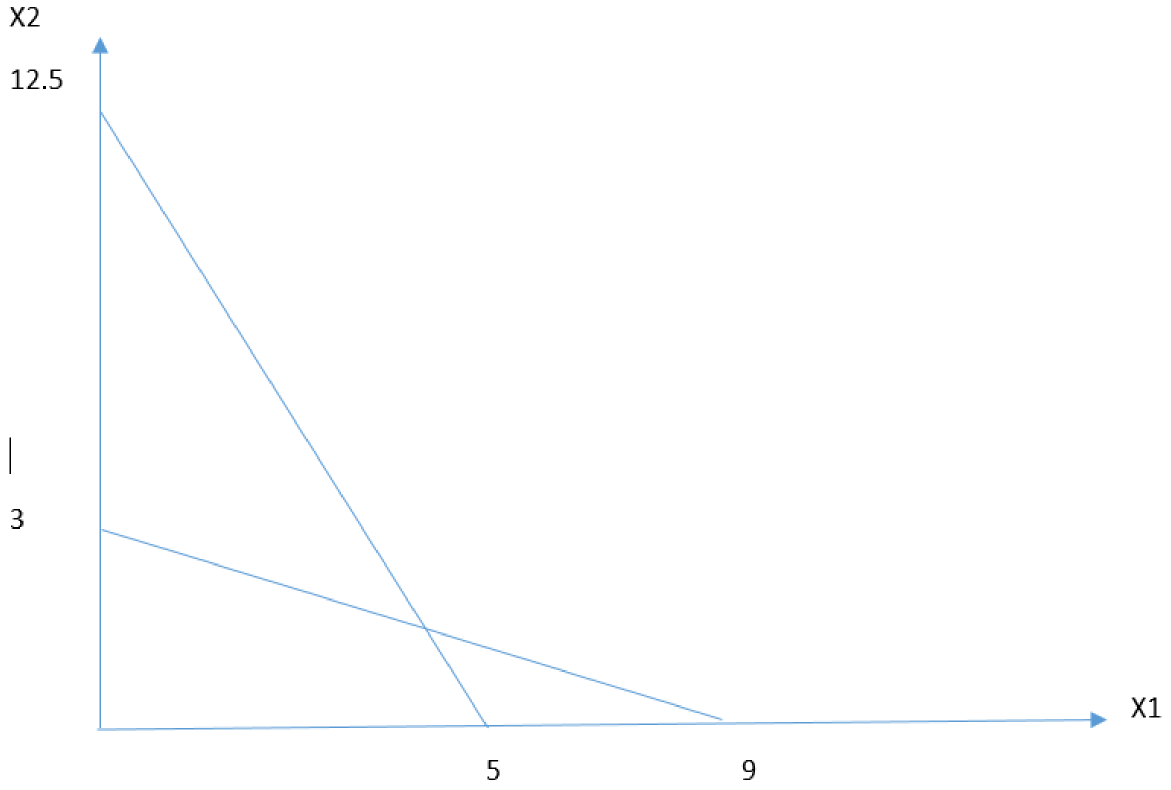
نأخذ القيد الثاني ونعوض مرة X1 صفر ونستخرج قيمة X2ومرة X2صفر ونستخرج قيمة X1 وكما يلي:

$$5x1 + 2x2 = 25 \rightarrow 0 + 2x2 = 25 \rightarrow x2 = \frac{25}{2} = 12.5 \quad (0,12.5)$$

$$5x1 + 2x2 = 25 \rightarrow 5x1 + 0 = 25 \rightarrow x1 = \frac{25}{5} = 12.5 \quad (5,0)$$

إذن نقطة المستقيم الثاني (5,12.5)

وألان نرسم المستقيمات المستخرجة



وألان نأخذ المستقيمان المتقاطعة ونحلها أنيا واستخراج قيم X1,X2

$$2x1 + 6x2 = 18 \ldots \ldots ..(1)$$

$$5x1 + 2X2 = 25 \ \ldots \ldots (2) \qquad \} * 3$$

$$2x1 \ + \ \cancel{6x2} = 18$$

$$\mp 15x1 \mp \cancel{6X2} = \mp 75$$

$$-13X1 = -57 = x1 = \frac{-57}{-13} = 4.4 = X1$$

ونعوض قيمة x1 المستخرجة في المعادلة (1) وكما يأتي:

$$2x1 + 6x2 = 18 \ \rightarrow \ 2(4.4) + 6x2 = 18 \quad \rightarrow \quad 8.8 + 6x2 = 18 \ \rightarrow$$

$$6X2 = 18 - 8.8 \rightarrow 6X2 = 9.2 \ \rightarrow X2 = \frac{9.2}{6} = 1.5 = X2$$

من خلال تعويض قيم X1,X2 في دالة الهدف المعطاة في السؤال نجد ان قيمة التعويض هي 91.4

$$Max\ z = 16x1 + 14x2$$

$$= 16(4.4) + 14(1.5) = 91.4$$

إذن الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية في هذا السؤال هو عندما تكون قيمة X1=4.4، X2=1.5

Example5 Home work: using Graphical Method to solve the following (L.P.P) Model?

max Z= $20X_1 + 30X_2$

s.to

$$3X_1 + 2X_2 \leq 90$$
$$2X_1 + 4X_2 \geq 100$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Example6 Home work: using Graphical Method to solve the following (L.P.P) Model?

max Z= $2X_1 + 5X_2$

s.to

$$2X_1 + X_2 \leq 10$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الطريقة المبسطة Simplex Method

هي الطريقة العامة لحل مسائل البرمجة الخطية ذات القيود من نوع اقل او يساوي ودالة الهدف لها من نوع Max او Min ، اما خطوات الحل هي :

١-نكتب النموذج المعطى في السؤال الى الشكل القياسي .

٢-نضع المسألة في جدول يسمى (Simplex table).

٣-نحدد المتغير الداخل وهو صاحب اكبر عدد في السالب (اقل قيمة) اذا كانت دالة الهدف Max واكبر عدد او معامل موجب اذا كانت دالة الهدف Min.

٤-نحدد المتغير الخارج بقسمة عناصر عمود الحل على المعاملات المتغير الداخل ونختار اقل ناتج ونختار اقل ناتج قسمة مع اهمال القسمة على العدد صفر او العدد السالب.

٥-نكون جدول جديد ثم نضع المتغير الداخل بدل المتغير الخارج ونحدد نقطة المحور وهي عنصر تقاطع المتغير الداخل مع المتغير الخارج ،ثم ايجاد معادلة المحور عن طريق قسمة عناصر الصف الذي به المحور على قيمة المحور نفسه.

٦-لأيجاد عناصر الصفوف الاخرة فنستخرجها حسب المعادلة التالية:

(عناصر الصف الجديد=عناصر الصف القديم –عناصر التقاطعX معادلة المحور)

٧- اذا كانت دالة الهدف Maxينتهي الحل عندما تكون جميع القيم موجبة او صفر في سطر Z.

اما اذا كانت دالة الهدف Minينتهي الحل عندما تكون جميع القيم سالبة او صفر في سطر Z.

Example1: Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

$$\max\ Z = 8X_1 + 6X_2$$

s.to

$$4X_1 + 2X_2 \le 60$$
$$2X_1 + 4X_2 \le 48$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

<u>Solution:</u>

١-نحول القيود الى الصيغة القياسية اي نحول القيود بشكل مساواة وذلك باضافة متغير وهمي اسمه Si وحسب تسلسل كل قيد وكما يلي:

$$4X_1 + 2X_2 + S_1 = 60$$
$$2X_1 + 4X_2 + S_2 = 48$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

والان نذهب الى دالة الهدف ونساويها الى الصفر بعد اضافة S1,S2 بمعاملات صفرية وكما يلي :

$$MaxZ = 8X_1 + 6X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$
$$MaxZ - 8X_1 - 6X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

الان نبدأ ببناء الجدول الاول او جدول الحل الاولي وكالاتي :

B.V	X1	X2	S1	S2	Sol.	Ratio
Z	-8	-6	0	0	0	---
S1	4	2	1	0	60	15
S2	2	4	0	1	48	24
Z	0	-2	2	0	120	-----
X1	1	0.5	0.25	0	15	30
S2	0	3	-0.5	1	18	6
Z	0	0	1.6	0.6	132	
X1	1	0	-0.3	-0.16	12	
X2	0	1	-0.16	0.3	6	

Example2: Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

max Z= $5X_1 + 3X_2$

s.to

$$X_1 + 2X_2 \le 6$$
$$2X_1 + 3X_2 \le 8$$
$$2X_1 + 4X_2 \le 10$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

Solution:

١-نحول القيود الى الصيغة القياسية اي نحول القيود بشكل مساواة وذلك باضافة متغير وهمي اسمه Si وحسب تسلسل كل قيد وكما يلي:

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 6$$
$$2X_1 + 3X_2 + S_2 = 8$$
$$2X_1 + 4X_2 + S_3 = 10$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

والان نذهب الى دالة الهدف ونساويها الى الصفر بعد اضافة S1,S2,S3, بمعاملات صفرية وكما يلي :

$$MaxZ = 5X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$
$$MaxZ - 5X_1 - 3X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

الان نبدأ ببناء الجدول الاول او جدول الحل الاولي وكالاتي :

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	Sol.	Ratio
Z	-5	-3	0	0	0	0	---
S1	1	2	1	0	0	6	6
S2	2	3	0	1	0	8	4
S3	2	4	0	0	1	10	5
Z	0	4.9	0	2.5	0	20	
S1	0	0.5	1	-0.5	0	4	
X1	1	1.5	0	0.5	0	4	
S3	0	1	0	-1	1	2	

Example3: Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

max Z= $3X_1 + 5X_2 + 3X_3$

s.to

$$-2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \le 10$$
$$X_1 + 4X_2 + 2X_3 \le 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

<u>Solution:</u>

١-نحول القيود الى الصيغة القياسية اي نحول القيود بشكل مساواة وذلك بإضافة متغير وهمي اسمه Si وحسب تسلسل كل قيد وكما يلي:

$$-2X_1 + 5X_2 + 3X_3 + S_1 = 10$$
$$X_1 + 4X_2 + 2X_3 + S_2 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \ge 0$$

والان نذهب الى دالة الهدف ونساويها الى الصفر بعد اضافة S1,S2 بمعاملات صفرية وكما يلي :

$$MaxZ = 3X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$
$$MaxZ - 3X_1 - 5X_2 - 3X_3 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

الان نبدأ ببناء الجدول الاول او جدول الحل الاولي وكالاتي :

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	Sol.	Ratio
Z	-3	-5	-3	0	0	0	
S1	-2	5	3	1	0	10	2
S2	1	4	2	0	1	10	2.5
Z	-5	0	0	1	0	10	-----
X2	-0.4	1	0.6	0.2	0	2	------
S2	2.6	0	-0.4	-0.8	1	2	0.76
Z	0	0	-0.76	-0.53	1.9	13.8	
X2							
X1	1	0	0.15	-0.30	-0.38	0.76	

Example4: Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

max Z= $3X_1 + 2X_2$

s.to

$$2X_1 + X_2 \le 60$$
$$2X_1 + 3X_2 \le 50$$
$$X_1 + X_2 \le 24$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

Solution:

١-نحول القيود الى الصيغة القياسية اي نحول القيود بشكل مساواة وذلك باضافة متغير وهمي اسمه Si وحسب تسلسل كل قيد وكما يلي:

$$2X_1 + X_2 + S_1 = 60$$
$$2X_1 + 3X_2 + S_2 = 50$$
$$X_1 + X_2 + S_3 = 24$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

والان نذهب الى دالة الهدف ونساويها الى الصفر بعد اضافة S1,S2,S3 بمعاملات صفرية وكما يلي :

$$MaxZ = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$
$$MaxZ - 3X_1 - 2X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

الان نبدأ ببناء الجدول الاول او جدول الحل الاولي وكالاتي :

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	Sol.	Ratio
Z	-3	-2	0	0	0	0	---
S1	2	1	1	0	0	60	30
S2	2	3	0	1	0	50	25
S3	1	1	0	0	1	24	24
Z	0	1	0	0	3	72	
S1	0	-1	1	0	-2	12	
S2	0	1	0	1	-2	2	
X1	1	1	0	0	1	24	

Example5: Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

$$\max\ Z = 8X_1 + 2X_2 - X_3$$

s.to

$$3X_1 + X_2 \le 9$$
$$2X_1 + 3X_2 \le 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Solution:

١-نحول القيود الى الصيغة القياسية اي نحول القيود بشكل مساواة وذلك باضافة متغير وهمي اسمه Si وحسب تسلسل كل قيد وكما يلي:

$$3X_1 + X_2 + S_1 = 9$$
$$2X_1 + 3X_2 + S_2 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \ge 0$$

والان نذهب الى دالة الهدف ونساويها الى الصفر بعد اضافة S1,S2 بمعاملات صفرية وكما يلي :

$$MaxZ = 8X_1 + 2X_2 - X_3 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$
$$MaxZ - 8X_1 - 2X_2 + X_3 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

الان نبدأ ببناء الجدول الاول او جدول الحل الاولي وكالاتي :

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	Sol.	Ratio
Z	-8	-2	1	0	0	0	---
S1	3	1	0	1	0	9	3
S2	2	3	0	0	1	10	5
Z	0	2	1	2.6	3	72	
X1	1	0.3	0	0.3	0	3	
S2	0	2.3	0	-0.6	1	4	

Example6 home work : Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

max Z= $X_1 + 2X_2$

s.to

$$X_1 + X_2 \le 5$$
$$X_1 + 2X_2 \le 12$$
$$X_1 \le 4$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

Example7 home work : Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

max Z= $20X_1 + 22X_2$

s.to

$$X_1 + X_2 \le 10$$
$$X_1 + 2X_2 \le 30$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Example8 home work : Solve the following (L.P.P) by using Simplex Method?

max Z= $70X_1 - 50X_2 - 33X_3$

s.to

$$10X_1 - 5X_2 \le 50$$
$$2X_1 + 12X_3 \le 25$$
$$X_1 \le 20$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Duality in Linear Programming الثنائية في البرمجة الخطية

المسألة الثنائية The Dual problem:

ان لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً مقابلاً (ثنائياً) يسمى احد النموذجين بالنموذج الاولي Primal Model ، بينما يطلق على الاخر تسمية النموذج المقابل (الثنائي) Dual Mode ان من اهم صفات المشتركة للنموذج الاولي والثنائي هو ان الحل الامثل للاحدهما يعطي معلومات كاملة عن الحل الامثل للنموذج الاخر.

تتمثل اهمية الثنائية في مسائل البرمجة الخطية فيما يلي :

١-تقليل عدد القيود وبالتالي تقليص العمل الحسابي.

٢-ان حل احدى المسألتين سواء كان الاولية او الثنائية بطريقة Simplex يعطي الحل الامثل للأخرى .

٣-هناك علاقة بين البرمجة الخطية ونظرية المباراة حيث من الممكن كتابة مصفوفة المباراة بنموذجين للبرمجة الخطية احدهما اولي والاخر ثنائي والعكس صحيح .

خطوات حل تحويل الاولية الى الثنائية :

١-اذا كانت دالة الهدف Max في الاولية ، تصبح Minفي الثنائية والعكس صحيح.

٢-اذا كانت دالة الهدف Max فان القيود يجب ان تكون بشكل اقل او يساوي ،واذا كانت دالة الهدف Min فأن القيود يجب ان تكون بشكل اكبر او يساوي .

٣-ان كل قيد في الاولية يقابله متغير واحد في المسألة الثنائية يرمز له بالرمز Yi حيث ان (i=1,2,3,……,m) اي ان عدد متغيرات الثنائية يساوي عدد قيود الاولية وعدد قيود الاولية يساوي عدد متغيرات الثنائية.

٤-جميع المتغيرات ولكلا المسألتين ذات قيمة موجبة .

٥-ان عناصر الطرف الايمن للقيود الاولية تصبح معاملات دالة الهدف في الصيغة الثنائية والعكس صحيح.

٦- ان كل قيد مساواة في الاولية يقابله متغير غير مقيد بإشارة في الثنائية والعكس صحيح.

Example 1 : Write the following (L.P.P) in **Dual problem ?**

حول نموذج البرمجة الخطية الى المسألة الثنائية

Max Z= $2X_1 + 2X_2 + 3X_3$

s.to

$$X_1 + X_2 + 4X_3 \leq 16 \qquad \text{Y1}$$
$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 20 \qquad \text{Y2}$$
$$2X_1 + X_3 \leq 18 \qquad \text{Y3}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

Min Y0= $16Y_1 + 20Y_2 + 18Y_3$

s.to

$$Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \geq 2$$
$$Y_1 + Y_2 \geq 2$$
$$4Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \geq 3$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Example 2 : Write the following (L.P.P) in **Dual problem ?**

Max Z= $X_1 + X_2$

s.to

$$X_1 + 2X_2 \leq 10 \qquad \text{Y1}$$
$$X_1 + 4X_2 \leq 20 \qquad \text{Y2}$$
$$X_2 \leq 6 \qquad \text{Y3}$$
$$X_1 \leq 18 \qquad \text{Y4}$$

$$X_1, X_2 0$$

Solution:

Min Y0= $10Y_1 + 20Y_2 + 6Y_3 + 18Y_4$

s.to

$$Y_1 + Y_2 + Y_4 \geq 1$$
$$2Y_1 + 4Y_2 + Y_3 \geq 1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

Example 3 : Write the following (L.P.P) in **Dual problem ?**

Min Z= $2X_1 + 4X_2 + 8X_3$

s.to

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 10 \qquad Y1$$
$$2X_1 + 3X_3 \geq 20 \qquad Y2$$
$$X_2 + 4X_3 \geq 60 \qquad Y3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

Max Y0= $10Y_1 + 20Y_2 + 60Y_3$

s.to

$$Y_1 + 2Y_2 \leq 2$$
$$Y_1 + Y_3 \leq 4$$
$$Y_1 + 3Y_2 + 4Y_3 \leq 8$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Example 4 : Write the following (L.P.P) in **Dual problem ?**

Min Z= $12X_1 + 10X_2 + 14X_3$

s.to

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 10 \qquad Y1$$
$$2X_1 + X_2 + 4X_3 \geq 50 \qquad Y2$$
$$3X_1 + 4X_2 = 60 \qquad Y3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

Max Y0= $10Y_1 + 50Y_2 + 60Y_3$

s.to

$$Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \leq 12$$
$$2Y_1 + Y_2 + 4Y_3 \leq 10$$
$$Y_1 + 4Y_2 \leq 14$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

Y3 غير مقيد بإشارة

Example 5 : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

Max Z= $X_1 + 5X_2$

s.to

$$X_1 + X_2 = 10 \qquad Y1$$
$$2X_1 + 3X_2 \leq 20 \qquad Y2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

Min Y0= $10Y_1 + 20Y_2$

s.to

$$Y_1 + 2Y_2 \geq 1$$
$$Y_1 + 3Y_2 \geq 5$$

$$Y_2 \geq 0$$

غير مقيد بإشارة Y1

Example 6 : Write the following (L.P.P) in Dual problem ?

Min Z= $60X_1 + 30X_2 + 15X_3$

s.to

$$8X_1 + 11X_2 + X_3 \geq 16 \qquad Y1$$
$$X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 18 \qquad Y2$$
$$5X_2 + 11X_3 \geq 20 \qquad Y3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

Max Y0= $16Y_1 + 18Y_2 + 20Y_3$

s.to

$$8Y_1 + Y_2 \leq 60$$
$$11Y_1 + 4Y_2 + 5Y_3 \leq 30$$
$$Y_1 + 2Y_2 + 11Y_3 \leq 15$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Example 7 Home Work : Write the following (L.P.P) in **Dual problem ?**

Max Z= $10X_1 + 16X_2 + 18X_3 + 21X_4$

s.to

$$X_1 + 4X_2 + 6X_3 + X_4 \leq 15$$
$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 \leq 20$$
$$4X_1 + 3X_2 + X_3 = 60$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Example 8 Home Work : Write the following (L.P.P) in **Dual problem ?**

Min Z= $15X_1 + 11X_2 + 14X_3$

s.to

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 5$$
$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \geq 10$$
$$X_1 = 8$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Transportation Models نماذج النقل

المقدمة:

تعتبر نماذج النقل احدى تطبيقات البرمجة الخطية واحد اساليبها الرياضية الكمية المشتقة من النموذج الرياضي العام ، وهو يهتم بإيجاد القيم الصغرى لكلف نقل البضائع من مراكز الانتاج او الاستلام الى مراكز التسوق وصولاً الى المستهلك . لذلك فمن الضروري تحديد الكميات الواجب نقلها من مصادر التجهيز الى مصادر الطلب من اجل اشباع المستهلك وتفادي حصول عجز بشرط تحقيق اقل تكلفة ممكنة .

ان الكميات المعروضة عند كل مصدر والكميات المطلوبة في كل موقع يفترض ان تكون معلومة وعلى سبيل المثال المنتج ربما ينقل من المصانع التي تمثل المصادر الى المخازن (الموقع).

اما جدول النقل فيمكن تمثيله بالشكل التالي :

	D1	D2	D3	. . . . .	n	Supply
S1	c11 X11	C12 X12	C13 X13	. . . . .	C1n X1n	a 1
S2	C21 X21	C22 X22	C23 X23	. . . . .	C2n X2n	a 2
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .			. . . . .
M	Cm1 Xm1	Cm2 Xm2	Cm3 Xm3	. . . . .	Cmn Xmn	a n
Demand	b 1	b 2	b 3	. . . . .	bj	ain bj

حل نموذج النقل :

ان الشرط الاساسي لحل نموذج النقل هو ان يكون النموذج متوازن ، اي عندما تكون الكميات المعروضة تساوي الكميات المطلوبة اي ان:

$$\sum a_i = \sum b_j$$

ولكن في الحياة العملية نجد ان هذا التوازن غير متحقق اي ان :

$$\sum a_i \neq \sum b_j$$

عند هذه الحالة يسمى نموذج النقل بأنه نموذج غير متوازن . لذا يجب تحويله الى نموذج متوازن لكي يمكن حله ، وقد تواجهنا الحالات التالية :

الحالة الاولى:

اذا كانت الكميات المعروضة اكبر من الكميات المطلوبة اي ان :

$$\sum a_i > \sum b_j$$

نضيف عمود وهمي كُلف النقل داخل خلاياه تساوي صفر والطلب عنده يساوي

$$\sum a_i - \sum b_j$$

Example1:

	D1	D2	D3	**Supply**
S1	7	9	10	10
S2	3	12	11	20
S3	7	8	6	60
Demand	5	10	15	30 / 90

$$\sum a_i = 90 \quad , \sum b_j = 30$$

$$\sum a_i - \sum b_j = 60$$

اذن جدول النقل يصبح

	D1	D2	D3	**D4**	**Supply**
S1	7	9	10	0	10
S2	3	12	11	0	20
S3	7	8	6	0	60
Demand	5	10	15	60	90 / 90

الحالة الثانية: اذا كانت الكميات المطلوبة اكبر من الكميات المعروضة اي ان :

$$\sum b_j > \sum a_i$$

نضيف صف وهمي الى خلية النقل كُلف النقل داخل كل خليةمن خلايا هذا الصف تساوي صفر والعرض عنده يساوي

$$\sum b_j - \sum a_i$$

Example2:

	D1	D2	D3	**Supply**
S1	8	2	2	8
S2	3	10	3	12
S3	7	8	10	10
Demand	15	30	15	60 / 30

$$\sum a_i = 30 \quad , \sum b_j = 60$$

$$\sum b_j - \sum a_i = 30$$

اذن جدول النقل يصبح

	D1	D2	D3	Supply
S1	8	2	2	8
S2	3	10	3	12
S3	7	8	10	10
S4	0	0	0	30
Demand	15	30	15	60 / 60

<u>طرق حل نموذج النقل :</u>

هناك ثلاث طرق لحل نموذج النقل وهي :

<u>١-طريقة الركن الشمالي الغربي North West Corner Method:</u>

خطوات حل هذه الطريقة:

١ نبدأ بالخلية الواقعة شمال غرب خلية النقل في الجدول ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لهذه الخلية اي نقارن a 1 مع b 1 فتظهر لنا ثلاث حالات :

-اذا كانت $a_1 > b_1$ نضع X11=b1 ثم ننتقل الى الخلية X12.

-اذا كانت $a_1 < b_1$ نضع X11=a1 ثم ننتقل الى الخلية X21.

-اذا كانت $a_1 = b_1$ نضع X11تساوي a1 او b1 ثم ننتقل الى الخلية قطرياً.

٢-نستمر بهذه المقارنة حيث في كل خطوة يتحقق القيود لنموذج النقل وبشكل متعاقب مبتعدين عن الزاوية الشمالية الغربية حتى نصل الى الخلية الواقعة جنوب شرق الجدول عندها تكون جميع القيود النموذج النقل قد تحققت.

٣- احتساب الكلفة النقل الكلية (Total Cost) من خلال اخذ كل خلية مليئة واجراء عملية ضرب رياضية بين الكلفة و الكمية المنقولة وجمعها .

Example1: Solve the (T.M) by using (**North west corner Method**)?

	D1	D2	D3	D4	**Supply**
S1	4	6	2	4	5
S2	3	0	5	6	25
S3	7	8	9	10	20
Demand	10	5	15	20	

Solution:

	D1	D2	D3	D4	**Supply**
S1	4 **5**	6	2	4	~~5~~ 0
S2	3 **5**	0 5	5 15	6	~~25~~ ~~20~~ ~~15~~ 0
S3	7	8	9	10 20	~~20~~ 0
Demand	~~10~~ ~~5~~ 0	~~5~~ 0	~~15~~ 0	~~20~~ 0	

وألان يتم حساب الكلفة الكلية لنموذج النقل :

T.C= (4*5)+(3*5)+(0*5)+(5*15)+(10*20)=310

Example2: Solve the (T.M) by using (**North west corner Method**)?

	D1	D2	D3	**Supply**
S1	20	3	4	6
S2	10	12	5	4
S3	5	11	30	10
Demand	5	10	5	

Solution:

	D1	D2	D3	**Supply**
S1	20 5	3 1	4	~~6~~ ~~1~~ 0
S2	10	12 4	5	~~4~~ 0
S3	5	11 5	30 5	~~10~~ ~~5~~ 0
Demand	~~5~~ 0	~~10~~ ~~9~~ ~~5~~ 0	~~5~~ 0	20 20

وألان يتم حساب الكلفة الكلية لنموذج النقل :

T.C= (5*20)+(1*3)+(4*12)+(5*11)+(5*30)=356

Example3Home work : Solve the (T.M) by using (**North west corner Method**)?

	D1	D2	D3	**Supply**
S1	14	8	9	10
S2	11	10	15	10
S3	2	14	20	12
S4	7	10	12	14
Demand	20	18	8	

2-طريقة الأقل كلفة Least Cost Method:

خطوات حل هذه الطريقة:

١-نختار الخلية ذات الاقل كلفة من جدول النقل.

٢-يتم تخصيص قيمة للمتغير داخل هذه الخلية وذلك بمقارنة العرض مع الطلب المناظر لتلك الخلية .

٣-يتم حذف الصف او العمود الذي يتحقق.

٤-نكرر جميع الخطوات السابقة حتى يتم حذف جميع الصفوف وجميع الاعمدة اي ان قيود نموذج النقل قد تحققت.

Example1: Solve the (T.M) by using (**Least Cost Method**)?

	D1	D2	D3	D4	**Supply**
S1	4	6	2	4	5
S2	3	0	5	6	25
S3	7	8	9	10	20
Demand	10	5	15	20	

Solution:

	D1	D2	D3	D4	**Supply**
S1	4	6	2 **5**	4	~~5~~ 0
S2	3 10	0 **5**	5 10	6	~~25~~ ~~20~~ ~~10~~ 0
S3	7	8	9	10	~~20~~ 0
Demand	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~15~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	

وألان يتم حساب الكلفة الكلية لنموذج النقل :

T.C= (2*5)+(3*10)+(0*5)+(5*10)=290

Example2: Solve the (T.M) by using (**Least Cost Method**)?

	D1	D2	D3	**Supply**
S1	2	6	12	15
S2	16	10	2	25
S3	10	7	8	20
Demand	25	10	25	

<u>Solution:</u>

	D1	D2	D3	**Supply**
S1	2 15	6	12	~~15~~ 0
S2	16	10	2 25	~~25~~ 0
S3	10 10	7 10	8	~~20~~ ~~10~~ 0
Demand	~~25~~ ~~10~~ 0	~~10~~ 0	~~25~~ 0	60 60

وألان يتم حساب الكلفة الكلية لنموذج النقل :

T.C= (2*15)+(2*25)+(10*10)+(7*10)=250

Example3Home work: Solve the (T.M) by using (**Least Cost Method**)?

	D1	D2	D3	D4	**Supply**
S1	10	9	6	5	15
S2	13	0	5	6	22
S3	11	12	9	4	28
Demand	10	15	15	20	

٣-طريقة فوجل Vogel Method :

تعتبر هذه الطريقة من افضل الطرق لحل مشكلة النقل وذلك لكون الحل الذي نتوصل اليه اقرب الى الحل الامثل .

خطوات حل هذه الطريقة:

١-نجد الفرق بين اقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود ويسمى هذا الفرق (بكلفة الجزاء).

٢-يتم اختبار الصف او العمود الذي يناظر اكبر كلفة جزاء (اكبر رقم).

٣-يتم تحديد خلية ذات اقل كلفة في الصف او العمود الذي يتم اختياره في الخطوة السابقة.

٤-يتم تخصيص قيمة للمتغير في هذه الخلية بمقارنة العرض مع الطلب المناظر لها.

٥-يتم حذف الصف او العمود الذي يتحقق.

٦-نكرر جميع الخطوات السابقة حتى يتم حذف جميع الصفوف وجميع الاعمدة اي ان قيود نموذج النقل قد تحققت.

Example1: Solve the (T.M) by using (**Vogel Method**)?

	D1	D2	D3	D4	**Supply**
S1	4	6	2	4	5
S2	3	0	5	6	25
S3	7	8	9	10	20
Demand	10	5	15	20	

Solution:

	D1	D2	D3	D4	**Supply**	الكلف المطروحة
S1	4	6	2	4	5	2
S2	3	0 5	5	6	~~25~~ 20	3
S3	7	8	9	10	20	1
Demand	10	~~5~~ 0	15	20		
الكلف المطروحة	1	6	3	2		

	D1	D3	D4	Supply	الكلف المطروحة
S1	4	2 5	4	~~5~~ ~~0~~	2
S2	3	5	6	20	2
S3	7	9	10	20	2
Demand	10	~~15~~ 10	20		
الكلف المطروحة	1	<u>3</u>	2		

	D1	D3	D4	Supply	الكلف المطروحة
S2	3 10	5	6	~~20~~ 10	2
S3	7	9	10	20	2
Demand	~~10~~ 0	10	20		
الكلف المطروحة	<u>4</u>	4	4		

	D3	D4	Supply	الكلف المطروحة
S2	5 10	6	~~10~~ 0	1
S3	9	10	20	1
Demand	~~10~~ 0	20		
الكلف المطروحة	4	4		

	D4	Supply	الكلف المطروحة
S3	10 20	~~20~~ 0	10
Demand	~~20~~ 0		
الكلف المطروحة	10		

وألان يتم حساب الكلفة الكلية لنموذج النقل :

T.C= (0*5)+(2*5)+(3*10)+(5*10)+(10*20) =290

تمارين مادة بحوث العمليات / للتدريب والمراجعة

Q1: Write the following (L.P.P) in **Canonical form?**

المطلوب : تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة القانونية ؟

min Z= $20X_1 + 22X_2 + 3X_3$

s.to

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \le 20$$
$$X_2 + 2X_3 = 22$$
$$X_1 + X_2 \le 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Q2: Write the following (L.P.P) in **Standard form?**

Min Z= $13X_1 + 12X_2 + 7X_3$

s.to

$$2X_1 + 3X_2 \le 20$$
$$3X_1 + 2X_3 \ge 25$$
$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Q3: using **Graphical Method** to Solve the following (L.P) Model**?**

max Z= $2X_1 + 5X_2$

$$2X_1 + X_2 \le 10$$
$$X_1 + 2X_2 \le 10$$
$$X1 + X2 \le 4$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

Q4 : Write the following (L.P.P) in **Dual problem ?**

Max Z= $20X_1 + 12X_2 + 15X_3$

s.to

$$X_1 + 3X_2 + 6X_3 \le 15$$
$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \le 20$$
$$5X_1 + 2X_2 + 7X_3 = 80$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Q5: Solve the (T.M) by using **(1-North West Corner Method ,**

2-Least cost Method ,

3- Vogel Method)?

المطلوب : حل نموذج النقل باستخدام(١- طريقة الركن الشمالي الغربي

٢- طريقة الأقل كلفة،

٣- طريقة فوجل) ؟

to / From		Destination			
	1	2	3	4	Supply
1	12	5	4	9	40
2	11	10	14	8	22
3	3	7	0	4	28
Demand	21	29	15	25	